

Министерство образования Республики Беларусь
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

В. Н. ГОРБУЗОВ

**ИНТЕГРАЛЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Монография

Гродно 2006

Горбузов, В.Н. Интегралы дифференциальных систем : монография / В.Н. Горбузов. — Гродно : ГрГУ, 2006. — 447 с. — ISBN 985-417-476-X

Дано систематическое изложение теории интегралов систем уравнений в полных дифференциалах. Рассматриваются следующие вопросы: построение интегрального базиса систем уравнений в частных производных и в полных дифференциалах; автономность и цилиндричность интегралов и последних множителей; задача Дарбу о построении первых интегралов и последних множителей по известным частным интегралам для систем уравнений в полных дифференциалах; существование и ограниченность числа компактных интегральных многообразий, определяемых обыкновенными, в полных дифференциалах и в частных производных дифференциальными системами, а также системами уравнений Пфаффа и системами внешних дифференциальных уравнений; алгебраическая вложимость систем уравнений в полных дифференциалах.

Книга рассчитана на научных работников и аспирантов, занимающихся общей теорией дифференциальных уравнений и её приложениями. Также может быть использована при чтении специальных курсов по дифференциальным уравнениям.

Библиогр. 140 назв.

Рекомендовано Советом Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой уравнений математической физики Белорусского государственного университета *Н.И. Юрчук*;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Российского государственного педагогического университета им. А.И.Герцена *В.Ф.Зайцев*;

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и оптимального управления Гродненского государственного университета им. Янки Купалы *С.А. Минюк*.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общая теория дифференциальных уравнений базируется на нахождении решений и построении интегралов.

На пути становления теории интегралов значительные вехи связаны с именами таких учёных, как J. Pfaff, C. Gauss, J. Jacobi, J. Liouville, Ф.Г. Миндинг, А.В. Летников, G. Darboux, H. Poincaré, S. Lie, Г.В. Пфейффер, G. Frobenius, В.Г. Имшенецкий, J. Cartan, А.Н. Коркин, Н.М. Гюнтер, Н.П. Еругин, М.В. Долов и др.

Функционально-аналитическое исследование интегралов выполнено наиболее глубоко для обыкновенных дифференциальных систем и систем уравнений в частных производных.

Наряду с интегрированием в квадратурах [54; 70 – 72; 75; 89] разрабатывались методы нахождения интегралов и установления их аналитических особенностей.

Так, исследования J. Liouville [138; 139] (особо рассматривавшего уравнение Риккати) были посвящены проблемам интегрируемости в квадратурах и привели к такой, ставшей классической, постановке задачи в теории интегралов, как изучение возможных видов интегралов и в случае наличия интеграла данного вида отыскания метода его нахождения.

Исследования [128 – 130] J. Jacobi послужили отправным пунктом построения общего интеграла посредством известных первых интегралов. Им же был введён [129] метод последнего множителя (понятие, которое в литературе часто называют последним множителем Якоби) при построении общего интеграла.

Глубокие исследования, ставшие фундаментом всей теории интегралов, принадлежат Ф.Г. Миндингу [131], А.В. Летникову [87], В.Г. Имшенецкому [74], Г.В. Пфейфферу (см. [90, с. 569 – 576]), А.Н. Коркину [81], Н.М. Гюнтеру [55].

Среди рассматриваемых задач одной из основных является задача Дарбу о построении и виде общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по известным частным интегралам [82; 124], которая распространяется как на

обыкновенные, так и на многомерные дифференциальные системы [4; 5; 12 – 16; 26; 27; 29; 38; 44; 45; 47; 48; 50 – 52; 56].

Развитие метода последнего множителя получило в работах S.Lie, который не только дал ему новое истолкование, но и создал теорию инфинитезимальных преобразований [135; 136]. В его работах выделены принципиальные подходы интегрирования, которые послужили основой общей теории интегрирования. Многообразие методов интегрирования оказалось обозримым с единых позиций группового подхода [134], получило базу для классификации [133; 140].

Заметим, что интерес к глобальному исследованию дифференциальных систем, снизившийся к началу двадцатого века, к середине века возродился вновь. Отметим лишь монографии: E.Cartan [77; 78], Н.М.Пунтер [55], Н.Г. Чеботарёв [119], L.Eisenhart [121], П.К.Рашевский [113], Е.А. Барбашин [7], Л.В.Овсянников [98], P.Olver [100], А.М. Самойленко [114]. Причина этого — открывшаяся важность таких подходов для математической физики [11; 73; 99; 127].

К этому периоду относится и обратная задача, поставленная Н.П.Еругиным [68; 69], о выделении из всего множества систем тех, которые обладают наперёд заданной интегральной кривой. Наиболее глубокие исследования обратной задачи проведены А.С.Галиуллиным [19; 20; 108]. Эта задача послужила толчком к весьма обширным исследованиям качественных характеристик в целом обыкновенных дифференциальных систем, имеющих частную интегральную кривую специального вида или со специальным аналитическим свойством.

Фундаментальные исследования предельных циклов обыкновенных дифференциальных систем по их интегралам и интегрирующим множителям проведены М.В.Доловым [57 – 67].

В.И.Мироненко разработал метод вложимости при исследовании обыкновенных дифференциальных систем [91; 93; 94] и подход по установлению наличия автономных интегралов у неавтономных обыкновенных дифференциальных систем [92].

Многие методы, разработанные для обыкновенных дифференциальных уравнений, послужили источником для создания теории интегралов многомерных систем. Рассмотрение дифферен-

циальных систем более широкого класса дало не только обобщение известных результатов относительно интегралов обыкновенных дифференциальных систем, но и, что естественно, поставило перед необходимостью отыскания новых подходов, создания дополнительных теорий, привело к переосмыслению сути проблемы и новым направлениям изучения глобальных свойств дифференциальных систем.

J.Pfaff [139] свёл задачу по интегрированию уравнений в частных производных к задаче интегрирования уравнений в полных дифференциалах. Дальнейшее развитие и углубление его результатов было дано С.Gauss [123] и чрезвычайно разнообразно в подходах J.Jacobi [130], S.Lie [132], G.Frobenius [126], J.Drach [125], E.Cartan [78].

Пройдя период интенсивного развития методов интегрирования, общая теория дифференциальных систем расширила диапазон исследований. Пришла пора активного использования топологии, алгебры, алгебраической геометрии, теории групп, многомерного вещественного и комплексного анализа. За последние десятилетия общая теория дифференциальных систем нашла глубокие новые приложения не только в теоретической физике и инженерных науках, но и в целом ряде других наук, например, экономике, теоретической биологии и медицине.

Современная теория интегралов систем уравнений в полных дифференциалах находится в стадии становления. Её проблемы рассматривались, как правило, по мере необходимости в связи с решением смежных задач. Это прежде всего задача о топологических характеристиках орбит как на фазовом пространстве в целом, так и локально в окрестностях сингулярных и особых точек; расположение орбит в фазовом пространстве; выпрямляемость орбит (В.В.Немыцкий [97], А.С.Понтрягин [107], И.В.Гайшун [15; 16; 18], А.И.Перов [102 – 106], Э.И.Грудо [53], В.В.Амелькин [1; 2], Н.Н.Ладис [84 – 86]) и др.

Общая и качественная теории систем уравнений в полных дифференциалах активно развиваются со второй половины прошлого столетия. При этом в общей теории основным объектом являются решения. Подробный обзор литературы и результатов по этим и другим направлениям теории систем уравнений в полных

дифференциалах дан в монографиях И.В. Гайшуна [16; 17] и монографии В.В. Амелькина [1].

Интегральные многообразия, определяемые обыкновенными дифференциальными системами, системами уравнений в полных дифференциалах, системами уравнений Пфаффа и системами внешних дифференциальных уравнений [118], являются одним из основных объектов качественного исследования этих дифференциальных систем. При этом устанавливается тесная связь с дифференциальной геометрией и топологией, а в последнее время широко используются методы алгебраической топологии.

Теория интегралов систем уравнений в полных дифференциалах является предметом настоящего исследования [24; 27; 28; 34; 38; 41 – 43; 51; 52; 101; 110; 117]. При этом имеет место тесная связь с системами уравнений в частных производных [12 – 14; 55; 93; 111] и обыкновенными дифференциальными системами [9; 23; 26; 29; 32; 33; 35; 36; 44; 45; 47; 50; 56; 57 – 72; 79; 81; 82; 96; 109; 112; 117].

Глобальное качественное исследование систем уравнений в полных дифференциалах выполняется на предмет наличия интегральных многообразий, обладающих специальными топологическими свойствами. Особо выделяются компактные интегральные многообразия [1; 30; 39; 40; 48; 88].

Основу данной монографии составляет работа автора «Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах» [27], которая существенно дополнена и переработана.

Ключевые слова: обыкновенная дифференциальная система, система уравнений в полных дифференциалах, линейная однородная система уравнений в частных производных, система уравнений Пфаффа, система внешних дифференциальных уравнений, первый интеграл, частный интеграл, группа Ли, гомотопическая группа, многообразие, морфизмы, топологическая эквивалентность, алгебраическая вложимость.

Список условных обозначений

Наряду с общепринятыми в математической литературе обозначениями дополнительно используются:

(CD) — система уравнений в полных дифференциалах (с. 15);

(CD)-(t_0, x_0) — задача Коши для системы (CD) с начальными данными (t_0, x_0) (с. 16);

(ICD) — вполне разрешимая система (CD) (с. 17);

(∂) — линейная однородная система уравнений в частных производных первого порядка (с. 35);

(N ∂) — нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных (с. 39);

(Pf) — система уравнений Пфаффа (с. 77);

(CDs) — s -неавтономная система уравнений в полных дифференциалах (с. 112);

(ACD) — автономная система уравнений в полных дифференциалах (с. 112);

(ICDs) — вполне разрешимая система (CDs) (с. 112);

(IACD) — вполне разрешимая система (ACD) (с. 112);

(PCD) — полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (с. 168);

(IPCD) — вполне разрешимая система (PCD) (с. 168);

\mathcal{A} — специальный класс систем (PCD) (с. 179);

(PCD \mathcal{A}) — полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах из класса \mathcal{A} (с. 179);

(IPCD \mathcal{A}) — система (IPCD) из класса \mathcal{A} (с. 179);

(APCD) — автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (с. 187);

\mathfrak{A} — специальный класс систем (APCD) (с. 201);

(APCD \mathfrak{A}) — система (APCD) из класса \mathfrak{A} (с. 201);

(IAPCD) — вполне разрешимая система (APCD) (с. 208);

(APDj) — автономные обыкновенные дифференциальные системы, индуцированные системой (APCD) (с. 208);

(IAPCD \mathfrak{A}) — система (IAPCD) из класса \mathfrak{A} (с. 209);

\mathfrak{B} — специальный подкласс систем класса \mathfrak{A} (с. 228);

(APCD \mathfrak{B}) — система (APCD) из класса \mathfrak{B} (с. 228);

(IAPCD \mathfrak{B}) — система (IAPCD) из класса \mathfrak{B} (с. 233);

(AD) — автономная обыкновенная дифференциальная система (с. 313);

(ADj) — автономные обыкновенные дифференциальные системы, индуцированные системой (ACD) (с. 324);

(∂ ACD) — линейная однородная система уравнений в частных производных, индуцированная системой (ACD) (с. 330);

(ED) — система внешних дифференциальных уравнений (с. 330);

(APD) — автономная обыкновенная полиномиальная дифференциальная система (с. 376).

Для ссылок на формулы (теоремы, леммы и т.д.) будем использовать записи $(k.l)$, $(k.l.m)$ и $(k.l.m.n)$ ($k.l$, $k.l.m$ и $k.l.m.n$), в которых k — номер формулы (теоремы, леммы и т.д.), l — номер пункта, m — номер параграфа, n — номер главы. При этом введение считаем нулевой главой.

ВВЕДЕНИЕ

1. Линейные дифференциальные операторы первого порядка

В пространстве \mathbb{R}^n введём правую прямоугольную декартову систему координат $Ox_1 \dots x_n$ с ортонормированным базисом e^1, \dots, e^n .

Положение точки x в \mathbb{R}^n будем определять по её координатам $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Условный скаляр

$$\mathfrak{A}(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где ∂_i — оператор дифференцирования по x_i , назовём *линейным дифференциальным оператором первого порядка*.

Векторная функция векторного аргумента

$$a: x \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(x) e^i, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

ассоциирована с оператором \mathfrak{A} . В этой связи ряд понятий теории функций сохраним в теории операторов.

Например, множество определения \mathcal{X} функции a назовём множеством определения ассоциированного оператора \mathfrak{A} и обозначим Da и $\text{D}\mathfrak{A}$ соответственно.

Скалярные функции $a_i, i = \overline{1, n}$, — *координаты* или *координатные функции* как функции a , так и оператора \mathfrak{A} .

Будем говорить, что оператор \mathfrak{A} является непрерывным, дифференцируемым или k раз непрерывно дифференцируемым на области \mathcal{X} , если ассоциированная вектор-функция a обладает этим свойством. При этом будем использовать условные записи:

$\mathfrak{A} \in C(\mathcal{X})$, когда оператор \mathfrak{A} непрерывен на области \mathcal{X} ;

$\mathfrak{A} \in C^k(\mathcal{X})$, когда оператор \mathfrak{A} k раз непрерывно дифференцируем на области \mathcal{X} .

Оператор \mathfrak{A} с помощью векторного дифференциального оператора

$$\partial = \sum_{\xi=1}^n (\partial_{\xi}) e^{\xi}$$

и вектора-функции a будем записывать компактно

$$\mathfrak{A}(x) = a(x)\partial, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{A}_{\tau}, D\mathfrak{A}_{\tau} = \mathcal{X}, \quad \tau = \overline{1, q}, \quad (1)$$

назовём *линейно зависимыми на области* \mathcal{X} , если в поле \mathbb{R} существуют числа λ_{τ} , $\tau = \overline{1, q}$, не равные одновременно нулю, такие, что линейная комбинация

$$\sum_{\tau=1}^q \lambda_{\tau} \mathfrak{A}_{\tau}(x) = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Если в поле \mathbb{R} существуют числа λ_{τ} , $\tau = \overline{1, q}$, не равные одновременно нулю, такие, что в фиксированной точке x_0 из области \mathcal{X} линейная комбинация

$$\sum_{\tau=1}^q \lambda_{\tau} \mathfrak{A}_{\tau}(x_0) = \mathfrak{O},$$

то операторы (1) назовём *линейно зависимыми в точке* x_0 . В противном случае их будем называть *линейно независимыми в точке* x_0 .

Операторы, линейно независимые в каждой точке области \mathcal{X} , назовём *линейно независимыми на области* \mathcal{X} .

Линейная зависимость операторов в каждой точке области не является достаточным условием их линейной зависимости на этой области. Это позволяет ввести ещё одну линейную связь между операторами [98, с. 113 – 114].

Линейно зависимые в каждой точке области \mathcal{X} операторы назовём *линейно связанными на области \mathcal{X}* .

Линейно зависимые на области операторы будут и линейно связанными на этой области.

Если

$$\mathfrak{A}(x_0) = \mathfrak{O},$$

то x_0 назовём *нулём* оператора \mathfrak{A} .

Критерий линейной связности [31, с. 105 – 108, 116]. Операторы (1) линейно связаны на области \mathcal{X} , если и только если существуют такие функции $\lambda_\tau: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, что линейная комбинация

$$\sum_{\tau=1}^q \lambda_\tau(x) \mathfrak{A}_\tau(x) = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (2)$$

при

$$\sum_{\tau=1}^q |\lambda_\tau(x)| \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}_\mathcal{X} \mathcal{X}_0,$$

где¹ \mathcal{X}_0 — множество общих нулей операторов (1).

Если в линейной комбинации (2) коэффициенты λ_τ , $\tau = \overline{1, q}$, суть голоморфные на области \mathcal{X} функции, то будем говорить, что операторы (1) *голоморфно* линейно связаны на области \mathcal{X} .

Скобками Пуассона дифференцируемых линейных дифференциальных операторов

$$\mathfrak{A}(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x) \partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

назовём линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = \sum_{i=1}^n (\mathfrak{A}B_i(x) - \mathfrak{B}A_i(x)) \partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

¹ $\mathbb{C}_\mathcal{X} \mathcal{X}_0$ — дополнение множества \mathcal{X}_0 до множества \mathcal{X} .

который в координатной форме имеет вид

$$[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = \sum_{i=1}^n \sum_{\xi=1}^n (A_{\xi}(x) \partial_{\xi} B_i(x) - B_{\xi}(x) \partial_{\xi} A_i(x)) \partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Заметим, что у дважды непрерывно дифференцируемых операторов \mathfrak{A} и \mathfrak{B} скобки Пуассона совпадают с их коммутатором

$$[\mathfrak{A}(x), \mathfrak{B}(x)] = \mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x) - \mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где произведение $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$.

В этом случае термины «скобки Пуассона» и «коммутатор» используются на равных правах.

2. Дифференциальные формы

Пусть V — область арифметического пространства \mathbb{R}^n . Выражение вида

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \quad \forall x \in V,$$

назовём *линейной дифференциальной формой* или *дифференциальной 1-формой* с областью определения V .

Символом \wedge обозначим внешнее умножение.

От дифференциальных 1-форм с помощью внешнего умножения можно перейти к заданию дифференциальных q -форм [76, с. 203 — 230; 118, с. 111].

Представление *дифференциальной q -формы* ω с областью определения V в виде линейной комбинации

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q},$$

$$\forall x \in V, \quad 1 \leq q \leq n,$$

является координатной записью q -формы с координатными функциями $a_{i_1 \dots i_q}$.

Область определения дифференциальной q -формы ω обозначим $D\omega$. Тогда $D\omega = V$.

Примем соглашение: под дифференциальной 0-формой с областью определения V понимать скалярную функцию с множеством определения V .

Пусть скалярная функция $f \in C^1(V)$. Внешним дифференциалом 0-формы f назовём дифференциал первого порядка функции f , то есть, дифференциальную 1-форму

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) dx_i, \quad \forall x \in V.$$

Если у дифференциальной q -формы ω все коэффициенты $a_{i_1 \dots i_q} \in C^k(V)$, то будем говорить, что у формы ω порядок гладкости k , и писать $\omega \in C^k(V)$.

Внешним дифференциалом гладкой q -формы ω назовём дифференциальную $(q+1)$ -форму

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q} da_{i_1 \dots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q},$$

$$\forall x \in V, \quad 1 \leq q \leq n.$$

Теорема 1 (А. Пуанкаре) [118, с. 111]. Если дифференциальная форма $\omega \in C^2(V)$, то

$$d(d\omega(x)) = 0, \quad \forall x \in V.$$

Дифференциальную q -форму ω с $D\omega = V$ назовём *точной*, если существует такая дифференциальная $(q-1)$ -форма ω_1 с $D\omega_1 = V$, что

$$d\omega_1(x) = \omega(x), \quad \forall x \in V.$$

Условие

$$d\omega(x) = 0, \forall x \in V, \quad (3)$$

необходимо (но не достаточно) для точности гладкой формы ω .

Гладкую дифференциальную форму ω с $D\omega = V$ назовём *замкнутой*, если имеет место равенство (3).

Точная гладкая на области дифференциальная форма на этой области замкнута:

$$\begin{aligned} \omega(x) = d\omega_1(x), \forall x \in V, \omega \in C^1(V) &\implies \\ \implies d\omega(x) = 0, \forall x \in V. \end{aligned}$$

Обратная импликация истинна только для областей V специальных видов.

Множество M пространства \mathbb{R}^n назовём *звёздным* относительно одной из своих точек $A(a)$, если для любой другой точки $X(x)$ из M отрезок

$$AX = \{x_\theta: x_\theta = x + \theta(a - x), 0 \leq \theta \leq 1\}$$

содержится в множестве M .

Заметим, что любое звёздное множество связно и любое выпуклое множество звёздно. Стало быть, открытое звёздное множество является областью.

Теорема 2 (А. Пуанкаре) [76, с. 222]. *Замкнутая на открытом звёздном относительно одной из своих точек множестве дифференциальная форма точна на нём.*

Глава 1

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОСЛЕДНИЕ МНОЖИТЕЛИ

§ 1. Полная разрешимость системы уравнений в полных дифференциалах

1. Задача Коши

Система уравнений в полных дифференциалах. (CD). Решение. Задача Коши. Существование решения задачи Коши. Единственность решения задачи Коши. Вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах. Область полной разрешимости.

Пусть $t = (t_1, \dots, t_m)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точки соответственно пространств \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n , $m < n$, а dt и dx суть векторы-столбцы $dt = \text{colon}(dt_1, \dots, dt_m)$ и $dx = \text{colon}(dx_1, \dots, dx_n)$.

Множество матриц размера $n \times m$ (n строк, m столбцов) обозначим $\mathbb{M}^{n,m}$.

Матрица $X \in \mathbb{M}^{n,m}$ имеет вид $\|X_{ij}\|$, её элементами X_{ij} являются скалярные функции векторного аргумента

$$X_{ij}: (t, x) \rightarrow X_{ij}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, причём \mathcal{T} и \mathcal{X} — области. Дифференциальную систему

$$dx = X(t, x) dt \tag{CD}$$

назовём *системой уравнений в полных дифференциалах*.

Относительно системы (CD) пространство \mathbb{R}^n назовём *фазовым пространством*, \mathbb{R}^{m+n} — *расширенным пространством*, а \mathbb{R}^m — *расширяющим пространством*.

Определение 1. Решением на области \mathcal{T}' , $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, системы (CD) назовём векторную функцию векторного аргу-

мента $x: \mathcal{T}' \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условиям:

- 1) функция x дифференцируема на области \mathcal{T}' ;
- 2) точки $(t, x(t)) \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \mathcal{T}'$;
- 3) выполняется матричное тождество

$$dx(t) = X(t, x(t)) dt, \quad \forall t \in \mathcal{T}'. \quad (1)$$

Для системы (CD) задача Коши состоит в следующем: *найти решения $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in U(t_0)$, на некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 , $U(t_0) \subset \mathcal{T}$, системы (CD), которые принимают значение x_0 при $t = t_0$, причём точка (t_0, x_0) принадлежит области \mathcal{D} .*

В этом случае будем говорить о решениях на области-окрестности $U(t_0)$ системы (CD), удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Точку (t_0, x_0) назовём начальными данными задачи Коши; вектор $t_0 = (t_1^0, \dots, t_m^0)$ назовём начальным значением независимых вектор-переменных t ; а вектор $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ назовём начальным значением искомым решений задачи Коши.

Примем условные записи:

(CD)- (t_0, x_0) — задача Коши с начальными данными (t_0, x_0) для системы (CD);

$x: t \rightarrow x(t; (t_0, x_0))$, $\forall t \in U(t_0)$, — решение $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in U(t_0)$, задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) .

В рамках задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) будем выделять задачи.

1. Задача существования решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) существует, если у точки t_0 из области \mathcal{T} существует такая окрестность $U(t_0)$, которая содержится в области \mathcal{T} , и существует решение на области-окрестности $U(t_0)$ системы (CD) $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in U(t_0)$, которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$, причём точка $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$.

2. Задача единственности решения задачи Коши.

Будем говорить, что задача Коши (CD)- (t_0, x_0) имеет единственное решение, если существует решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) и существует в расширяющем пространстве \mathbb{R}^m окрестность точки t_0 , на которой решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) единственное.

Возможность однозначного разрешения задачи Коши на множестве установим, приняв

Определение 2. Систему (CD) назовём вполне разрешимой на подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} , если в любой точке (t_0, x_0) из области \mathcal{D}' решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) единственно.

Область, на которой задача Коши для системы (CD) вполне разрешима, будем называть *областью полной разрешимости* системы (CD) или *областью единственности* системы (CD).

Вполне разрешимую на области \mathcal{D} систему (CD) будем обозначать (ICD).

3. Задача об аналитическом виде функции, являющейся решением задачи Коши.

Классической задачей такого плана является задача о голоморфности решения

$$x: t \rightarrow x(t; (t_0, x_0)), \forall t \in U(t_0).$$

Сюда же относится, например, задачи об алгебраичности и представлении специальными функциями решения задачи Коши (ICD)- (t_0, x_0) .

2. Условия Фробениуса

Локальная разрешимость задачи Коши. Условия Фробениуса полной разрешимости. Интегральная система задачи Коши. Теорема Фробениуса полной разрешимости задачи Коши.

Систему (CD) будем рассматривать при условии, что матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$, то есть, когда все её элементы X_{ij} являются непрерывно дифференцируемыми на области \mathcal{D} функциями.

Для систем этого класса полная разрешимость может быть установлена на основании следующих положений.

2.1. Разрешимость задачи Коши

Если матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$, то задача Коши разрешается следующим образом: в любой произвольным образом взятой точке (t_0, x_0) из области \mathcal{D} либо не существует решения задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) , либо задача Коши (CD)- (t_0, x_0) разрешается однозначно.

Эту закономерность выражает

Теорема 1. Пусть y системы (CD) матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$. Тогда для любой точки (t_0, x_0) из области \mathcal{D} можно указать в расширяющем пространстве \mathbb{R}^m замкнутый шар, на котором решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) может быть лишь единственным.

Доказательство. В области \mathcal{D} произвольным образом выберем точку (t_0, x_0) , в которой решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) существует.

В расширенном пространстве \mathbb{R}^{n+m} введём норму, а в расширяющем пространстве \mathbb{R}^m с наследственной нормой выделим такой постоянный вектор v с началом в точке t_0 , что его норма $\|v\| = r$. Положительное число r выберем так, что замкнутый в нормированном пространстве \mathbb{R}^m шар $D_r^m(t_0)$ радиуса r с центром в точке t_0 содержится в окрестности $U(t_0)$ точки t_0 .

Окрестность $U(t_0)$ такова, что на ней решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) существует.

Система (CD) вдоль вектора v , то есть, когда

$$t = t_0 + v\tau, \quad \forall \tau \in [0; 1],$$

будет обыкновенной дифференциальной системой n -го порядка

$$dy = X(t_0 + v\tau, y)v d\tau. \quad (1)$$

Функция

$$y: \tau \rightarrow x(t_0 + v\tau), \quad \forall \tau \in [0; 1],$$

построенная на основании решения

$$x: t \rightarrow x(t; (t_0, x_0)), \quad \forall t \in U(t_0),$$

системы (CD), является решением на отрезке $[0; 1]$ системы (1).

При этом $y(0) = x(t_0) = x_0$.

Следовательно, задача Коши (CD)- (t_0, x_0) вдоль вектора v является задачей Коши (1)- $(0, x_0)$.

Поскольку $X \in C^1(\mathcal{D})$, то задача Коши (1)- $(0, x_0)$ имеет единственное решение.

Значит, задача Коши (CD)- (t_0, x_0) вдоль любого в простран-

стве \mathbb{R}^m вектора постоянной нормы r с точкой приложения t_0 разрешается однозначно.

Поэтому на замкнутом шаре $D_r^m(t_0)$ решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) единственное. ■

2.2. Необходимые условия полной разрешимости

Лемма 1. Если система (CD) при $X \in C^1(\mathcal{D})$ вполне разрешима на области \mathcal{D} , то

$$\begin{aligned} \partial_{t_j} X_{i\zeta} + \sum_{\xi=1}^n X_{\xi j} \partial_{x_\xi} X_{i\zeta} &= \partial_{t_\zeta} X_{ij} + \sum_{\xi=1}^n X_{\xi\zeta} \partial_{x_\xi} X_{ij}, \\ \forall(t, x) \in \mathcal{D}, i &= \overline{1, n}, j, \zeta = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. Пусть

$$x: t \rightarrow x(t), \forall t \in U(t_0),$$

является решением задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) с произвольными начальными данными $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$.

Из условия $X \in C^1(\mathcal{D})$ и тождества

$$dx(t) = X(t, x(t)) dt, \forall t \in U(t_0),$$

следует, что функция-решение x дважды непрерывно дифференцируема на окрестности $U(t_0)$.

Значит, на $U(t_0)$ вторые смешанные производные функции-решения x совпадают:

$$\partial_{t_j t_\zeta} x_i(t) = \partial_{t_\zeta t_j} x_i(t), \forall t \in U(t_0), i = \overline{1, n}, j, \zeta = \overline{1, m}.$$

Вторая смешанная производная

$$\begin{aligned} \partial_{t_j t_\zeta} x_i(t) &= \partial_{t_\zeta} (\partial_{t_j} x_i(t)) = \partial_{t_\zeta} X_{ij}(t, x(t)) = \\ &= \partial_{t_\zeta} X_{ij}(t, x)|_{x=x(t)} + \sum_{\xi=1}^n \partial_{x_\xi} X_{ij}(t, x)|_{x=x(t)} \cdot \partial_{t_\zeta} x_\xi(t) = \end{aligned}$$

$$= \left(\partial_{t_\zeta} X_{ij}(t, x) + \sum_{\xi=1}^n X_{\xi\zeta}(t, x) \cdot \partial_{x_\xi} X_{ij}(t, x) \right) \Big|_{x=x(t)}, \quad \forall t \in U(t_0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left(\partial_{t_j} X_{i\zeta}(t, x) + \sum_{\xi=1}^n X_{\xi j}(t, x) \partial_{x_\xi} X_{i\zeta}(t, x) \right) \Big|_{x=x(t)} = \\ & = \left(\partial_{t_\zeta} X_{ij}(t, x) + \sum_{\xi=1}^n X_{\xi\zeta}(t, x) \partial_{x_\xi} X_{ij}(t, x) \right) \Big|_{x=x(t)}, \end{aligned}$$

$$\forall t \in U(t_0), \quad i = \overline{1, n}, \quad j, \zeta = \overline{1, m}.$$

Отсюда, ввиду выбора точки (t_0, x_0) в области \mathcal{D} произвольным образом, следует система тождеств (2). ■

Необходимые условия полной разрешимости (2) будем называть *условиями Фробениуса* относительно системы (CD).

Система (CD) индуцирует m линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^n X_{ij}(t, x) \partial_{x_i}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

которые назовём *операторами дифференцирования в силу системы* (CD), а их действия будем называть *производными Ли в силу системы* (CD).

Условия Фробениуса (2) посредством операторов (3) с помощью скобок Пуассона выражаются системой тождеств

$$[\mathfrak{X}_j(t, x), \mathfrak{X}_\zeta(t, x)] = \mathfrak{D}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j, \zeta = \overline{1, m}. \quad (4)$$

2.3. Интегральная система задачи Коши

Пусть для системы (CD) выполняются условия Фробениуса (2) и поставлена задача Коши с начальными данными (t_0, x_0) .

При выполнении условий (2) векторная дифференциальная 1-форма $X(t, x(t)) dt$ является замкнутой на любой односвязной области \mathcal{B} , содержащейся в \mathcal{T} .

А по теореме Пуанкаре (теорема 1 из введения), эта 1-форма будет точной на области \mathcal{B} .

Тогда векторный криволинейный интеграл $\int_{t_0}^t X(\tau, x(\tau)) d\tau$ в области \mathcal{B} не зависит от пути интегрирования.

Это позволяет на \mathcal{B} построить интегральную систему

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

Определение 1. *Решением на односвязной области \mathcal{B} , содержащейся в области \mathcal{T} , интегральной системы (5) при выполнении условий Фробениуса (2) назовём векторную функцию векторного аргумента $x: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$, такую, что:*

- 1) *функция x непрерывно дифференцируема на \mathcal{B} ;*
- 2) *точки $(t, x(t)) \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \mathcal{B}$;*
- 3) *точка $t_0 \in \mathcal{B}$ и выполняется матричное тождество*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad \forall t \in \mathcal{B}. \quad (6)$$

То, что интегральная система (5) рассматривается в окрестности точки t_0 , обосновано тем, что она составлена в связи с задачей Коши (CD)-(t_0, x_0).

Лемма 2. *Пусть матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$ и выполняются условия Фробениуса (2), а односвязная область \mathcal{B} содержится в области \mathcal{T} . Тогда функция $x: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является решением на области \mathcal{B} задачи Коши (CD)-(t_0, x_0), если и только если она является решением на этой области интегральной системы (5).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть решение задачи Коши (CD)-(t_0, x_0) на односвязной области \mathcal{B} .

Тогда имеет место матричное тождество

$$dx(t) = X(t, x(t)) dt, \quad \forall t \in \mathcal{B}. \quad (7)$$

Ввиду независимости от пути интегрирования криволинейного интеграла $\int_{t_0}^t X(\tau, x(\tau)) d\tau$ в области \mathcal{B} , интегрированием тожде-

ства (7) по пути от t_0 до t , целиком лежащем в этой области, с учётом начального условия $x(t_0) = x_0$, получаем тождество (6).

Тем самым, устанавливаем, что функция $x: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$, будучи решением задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) , является решением интегральной системы (5).

Достаточность. Пусть $x: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть решение на односвязной области интегральной системы (5) при выполнении условий Фробениуса (2).

Тогда имеет место тождество (6).

Дифференцируя это тождество по t , получаем тождество (7).

Стало быть, функция-решение x интегральной системы (5) является решением на области \mathcal{B} системы (CD).

При этом из тождества (6), полагая $t = t_0$, получаем, что $x(t_0) = x_0$.

Значит, x — решение задачи Коши (CD)- (t_0, x_0) . ■

В соответствии с леммой 2 систему (5) назовём *интегральной системой задачи Коши* (CD)- (t_0, x_0) .

2.4. Теорема Фробениуса

Лемма 3. Пусть матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$ и выполняются условия Фробениуса (2). Тогда система (CD) вполне разрешима на области \mathcal{D} .

Доказательство. Сначала докажем, что на достаточно малой окрестности точки t_0 интегральная система (5) имеет единственное решение.

Матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$ и, следовательно, удовлетворяет условию Липшица по x в области \mathcal{D} локально: $X \in \text{Lip}_x(\mathcal{D})_{\text{loc}}$.

Тогда у точки (t_0, x_0) из \mathcal{D} существует такая окрестность U_0 , $U_0 = U(t_0, x_0)$, $U_0 \subset \mathcal{D}$, что сужения всех функций-элементов X_{ij} матрицы X на окрестности U_0 ограничены

$$\exists M > 0: |X_{ij}(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in U_0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

и удовлетворяют условию Липшица на окрестности U_0 по переменной x глобально

$$|X_{ij}(t, x'') - X_{ij}(t, x')| \leq L \max_{\xi=\overline{1, n}} |x''_{\xi} - x'_{\xi}|, \\ \forall (t, x'), (t, x'') \in U_0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n), x'' = (x''_1, \dots, x''_n), L > 0.$$

Положительное число δ подберём так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) точки (t, x) принадлежат окрестности U_0 при

$$\|t - t_0\| \leq \delta, |x_{\xi} - x_{\xi}^0| \leq mM\delta, \xi = \overline{1, n};$$

2) $mL\delta < 1$.

Выполнения этих требований всегда можно добиться, выбрав окрестность U_0 точки (t_0, x_0) достаточно малой.

Пусть \mathbb{V} есть множество функций $x: t \rightarrow x(t)$, непрерывных на параллелепипеде $\Pi = \bigtimes_{j=1}^m [t_j^0 - \delta; t_j^0 + \delta]$, таких, что

$$|x_{\xi}(t) - x_{\xi}^0| \leq mM\delta \quad \text{при} \quad \|t - t_0\| \leq \delta, \xi = \overline{1, n}. \quad (10)$$

На множестве \mathbb{V} введём метрику по формуле

$$\rho(x', x'') = \max_{\xi=\overline{1, n}} \left\{ |x'_{\xi}(t) - x''_{\xi}(t)| : t \in \Pi \right\}, \forall x', x'' \in \mathbb{V}.$$

Множество (\mathbb{V}, ρ) является полным метрическим пространством как метрическое пространство непрерывных на параллелепипеде функций.

Системой интегральных равенств

$$y_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m X_{ij}(\tau, x(\tau)) d\tau_j, \quad \forall t \in \Pi, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

определим отображение $Y: x \rightarrow Y(x), \forall x \in \mathbb{V}$, которое будет отображением полного метрического пространства \mathbb{V} в себя.

В самом деле, функции

$$y: t \rightarrow (y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad \forall t \in \Pi, \quad (12)$$

заданные формулами (11) на основании функций $x: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ из полного пространства (\mathbb{V}, ρ) , непрерывны на параллелепипеде Π (функции $x: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ и матрица X непрерывны).

Кроме того, из представлений (11), ограничений (8) и принадлежности функций $x: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ пространству (\mathbb{V}, ρ) , следует, что при $\|t - t_0\| \leq \delta$ имеют место оценки

$$|y_\xi(t) - x_\xi^0| \leq \left| \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m X_{ij}(\tau, x(\tau)) d\tau_j \right| \leq mM\delta, \quad \xi = \overline{1, n}.$$

Итак, функции (12) удовлетворяют условию (10), а значит, являются элементами полного метрического пространства \mathbb{V} .

Поэтому Y , заданное равенствами (11), является отображением \mathbb{V} в себя.

Докажем, что отображение $Y: x \rightarrow Y(x), \forall x \in \mathbb{V}$, определяемое интегральными равенствами (11), является сжимающим отображением полного метрического пространства \mathbb{V} .

С учётом условий Липшица (9) модуль разности координат образов этого отображения при каждом $\xi = \overline{1, n}$ на Π

$$\begin{aligned} |y_\xi'' - y_\xi'| &\leq \left| \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m |X_{ij}(\tau, x''(\tau)) - X_{ij}(\tau, x'(\tau))| d\tau_j \right| \leq \\ &\leq mL\delta \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\rho(Y(x'), Y(x'')) \leq mL\delta \rho(x', x''), \forall x', x'' \in \mathbb{V}.$$

А поскольку

$$mL\delta < 1,$$

то Y — сжимающее отображение полного метрического пространства \mathbb{V} в себя.

Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку [80, с. 75].

Это означает, что интегральная система (5) имеет единственное решение.

В соответствии с леммой 2 задача Коши (CD)- (t_0, x_0) имеет единственное решение.

Начальные данные (t_0, x_0) в области \mathcal{D} выбраны произвольным образом. Поэтому система (CD) является вполне разрешимой на области \mathcal{D} . ■

Лемма 1 (выражает необходимое условие полной разрешимости) и лемма 3 (выражает достаточное условие полной разрешимости) составляют

Теорема 2 (Ф.Г. Фробениуса). *Если матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$, то система (CD) вполне разрешима на области \mathcal{D} тогда и только тогда, когда выполняются условия Фробениуса (2).*

Если учесть теорему 1, то условия Фробениуса можно рассматривать как критерий существования решения задачи Коши

Теорема 3. *Задача Коши (CD)- (t_0, x_0) , когда $X \in C^1(\mathcal{D})$, имеет решение, если и только если на некоторой окрестности точки (t_0, x_0) выполняются условия Фробениуса, причём решение этой задачи Коши будет единственным.*

§ 2. Базис первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах

1. Первый интеграл

Первый интеграл. Критерий существования первого интеграла у вполне разрешимой системы.

Пусть у системы (CD) матрица $X \in C(\mathcal{D})$, то есть, все её элементы X_{ij} — непрерывные на области \mathcal{D} функции.

Определение 1. Непрерывно дифференцируемую на подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} скалярную функцию векторного аргумента $F: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ назовём **первым интегралом на области \mathcal{D}' системы (CD)** при $X \in C(\mathcal{D})$, если дифференциал функции F в силу системы (CD) тождественно равен нулю на области \mathcal{D}' :

$$dF(t, x)|_{(CD)} = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'. \quad (1)$$

Дифференциал функции F в силу системы (CD) равен

$$\begin{aligned} dF(t, x)|_{(CD)} &= \sum_{j=1}^m \partial_{t_j} F(t, x) dt_j + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F(t, x) dx_i|_{(CD)} = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\partial_{t_j} F(t, x) + \sum_{i=1}^n X_{ij}(t, x) \partial_{x_i} F(t, x) \right) dt_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \mathfrak{X}_j F(t, x) dt_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \end{aligned}$$

где $\mathfrak{X}_j, j = \overline{1, m}$, — операторы (3.2.1).

Это представление позволяет тождество (1) записать в виде операторной системы тождеств

$$\mathfrak{X}_j F(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

а также является обоснованием того, что линейные дифференциальные операторы \mathfrak{X}_j были названы операторами дифференцирования в силу системы (CD).

В случае полной разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах имеет место следующий *критерий существования первого интеграла*, который следует из тождества (1).

Теорема 1. *Функция $F: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ является первым интегралом на области \mathcal{D}' из \mathcal{D} системы (ICD) при $X \in C(\mathcal{D})$, если и только если эта функция, будучи непрерывно дифференцируемой на \mathcal{D}' , сохраняет постоянное значение вдоль любого решения $x: \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{X}'$, $\mathcal{T}' \times \mathcal{X}' = \mathcal{D}'$, системы (ICD):*

$$F(t, x(t)) = C, \forall t \in \mathcal{T}', C = \text{const}.$$

Что касается не являющихся вполне разрешимыми на области \mathcal{D} систем (CD), то они могут иметь первые интегралы даже в случаях, когда у них нет решений.

Пример 1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 dt_1 + 3x_1 dt_2, \\ dx_2 &= (1 + x_1 + 2x_2) dt_1 + (x_1 + 3x_2) dt_2 \end{aligned} \quad (3)$$

не является вполне разрешимой, так как у индуцированных линейных дифференциальных операторов \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\mathfrak{X}_1(t, x), \mathfrak{X}_2(t, x)] &= \\ &= \left[\partial_{t_1} + x_1 \partial_{x_1} + (1 + x_1 + 2x_2) \partial_{x_2}, \partial_{t_2} + 3x_1 \partial_{x_1} + (x_1 + 3x_2) \partial_{x_2} \right] = \\ &= (3 - x_1) \partial_{x_2}, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

не являются нуль-оператором ни на какой области из \mathbb{R}^4 .

По теореме 3.2.1, система (3) не имеет решений.

В соответствии с определением 1 функция

$$F: (t, x) \rightarrow x_1 \exp(- (t_1 + 3t_2)), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4, \quad (4)$$

является первым интегралом на \mathbb{R}^4 системы (3).

На протяжении всей главы, говоря о системе (CD), будем иметь ввиду, что матрица $X \in C^1(\mathcal{D})$. В этом случае условия

Фробениуса (4.2.1) являются критерием (теорема 2.2.1) полной разрешимости на области \mathcal{D} системы (CD).

2. Базис первых интегралов

Функциональная неоднозначность первого интеграла. Базис первых интегралов и его размерность.

На подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} рассмотрим совокупность k непрерывно дифференцируемых скалярных функций

$$F_s: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad s = \overline{1, k}, \quad (1)$$

и вектор-функцию

$$F: (t, x) \rightarrow (F_1(t, x), \dots, F_k(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'.$$

Теорема 1. *Если функции (1) есть первые интегралы на области \mathcal{D}' системы (CD), то функция*

$$\Psi: (t, x) \rightarrow \Phi(F(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad (2)$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая на области EF функция, также является первым интегралом на области \mathcal{D}' системы (CD).

Доказательство. В соответствии с определением 1.1 для первых интегралов (1) выполняется операторная система тождеств

$$\mathfrak{X}_j F_s(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, k}.$$

Тогда у произвольной скалярной функции Φ , непрерывно дифференцируемой на множестве значений $EF = \bigtimes_{s=1}^k EF_s$, производные Ли на области \mathcal{D}' в силу системы (CD)

$$\mathfrak{X}_j \Phi(F(t, x)) = \sum_{s=1}^k \partial_{F_s} \Phi(F)|_{F=F(t, x)} \mathfrak{X}_j F_s(t, x) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

По определению 1.1, функция (2) является первым интегралом на области \mathcal{D}' системы (CD). ■

Эта теорема выражает *функциональную неоднозначность первого интеграла* системы уравнений в полных дифференциалах: *если функция $F_1: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ является первым интегралом на области \mathcal{D}' , $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, системы (CD), то и функция*

$$\Psi_1: (t, x) \rightarrow \Phi(F_1(t, x)), \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая на области EF_1 функция, будет первым интегралом на области \mathcal{D}' этой системы.

Данное обстоятельство устанавливает приоритет первых интегралов, которые функционально не зависят на области \mathcal{D}' . При этом ставятся задачи о существовании и количестве функционально независимых первых интегралов у системы (CD).

Определение 1. *Совокупность функционально независимых на области \mathcal{D}' первых интегралов (1) системы (CD) назовём **базисом первых интегралов** на области \mathcal{D}' , если для любого первого интеграла $\Psi: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ этой системы имеет место представление*

$$\Psi(t, x) = \Phi(F_1(t, x), \dots, F_k(t, x)), \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

где Φ — некоторая функция, непрерывно дифференцируемая на области $\text{EF} = \bigtimes_{s=1}^k \text{EF}_s$. Число k при этом назовём

***размерностью** базиса первых интегралов на области \mathcal{D}' системы (CD).*

3. Размерность базиса первых интегралов вполне разрешимой системы

Изменение начальных данных вдоль решения. Локальное существование функционально независимых первых интегралов у вполне разрешимой системы. Общий вид первого интеграла вполне разрешимой системы. Локальный базис первых интегралов вполне разрешимой системы.

Систему (CD) будем рассматривать, когда она является голоморфной, то есть, функции $X_{ij}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, голоморфны на области \mathcal{D} .

Для голоморфной системы (ICD), по теореме Коши¹, у каждой точки t_0 области \mathcal{T} существует окрестность, на которой решение системы (ICD) голоморфно.

Более того, решения голоморфной системы (ICD) голоморфно зависят от параметров и начальных данных [16, с. 39 – 41].

Лемма 1. Пусть векторная функция

$$x: t \rightarrow x(t; (t_0, x_0)), \forall t, t_0 \in \mathcal{T}',$$

есть решение на некоторой односвязной подобласти \mathcal{T}' области \mathcal{T} голоморфной системы (ICD). Тогда для любой точки t_* из области \mathcal{T}' решение

$$x: t \rightarrow x(t; (t_*, x_*)), \forall t \in \mathcal{T}',$$

системы (ICD) при $x_* = x(t_*; (t_0, x_0))$ такое, что

$$x(t_0; (t_*, x(t_*; (t_0, x_0)))) = x_0.$$

Доказательство. Пусть \tilde{x} и $\tilde{\tilde{x}}$ есть решения соответствующих задач Коши системы (ICD):

$$\tilde{x}: t \rightarrow x(t; (t_0, x_0)), \forall t \in \mathcal{T}',$$

и

$$\tilde{\tilde{x}}: t \rightarrow x(t; (t_*, x(t_*; (t_0, x_0))))), \forall t \in \mathcal{T}'.$$

Их значения $\tilde{x}(t_*) = \tilde{\tilde{x}}(t_*)$.

Тогда в односвязной области \mathcal{T}' , которой принадлежат точки t_0 и t_* , по теореме Коши, имеем:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\tilde{x}}(t), \forall t \in \mathcal{T}'.$$

Поэтому $\tilde{\tilde{x}}(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0$, что в принятых обозначениях соответствует равенству

$$x(t_0; (t_*, x(t_*; (t_0, x_0)))) = x_0. \blacksquare$$

¹См., например, теорему 3.3 из [16, с. 26].

Предложение 1. *Если для голоморфной системы (ICD) в окрестности точки (t_0, x_0) из области \mathcal{D} выполняются условия теоремы Коши, то эта система имеет n функционально независимых на некоторой окрестности точки (t_0, x_0) первых интегралов.*

Доказательство. Пусть

$$x: t \rightarrow x(t; (t_0, x_0)), \forall t \in \mathcal{T}',$$

есть решение системы (ICD), когда область $\mathcal{T}' \ni t_0$. А функция

$$F: (t, x) \rightarrow x(t_0; (t, x)), \forall (t, x) \in U_0, U_0 = U((t_0, x_0)),$$

при

$$x(t; (t_0, x_0)) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t - t_0)^k, \forall t \in U(t_0),$$

такова, что

$$F(t, x) = x(t_0; (t, x)) = x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t_0 - t)^k, \forall (t, x) \in U_0.$$

Согласно голоморфности решений задачи Коши по начальным данным, функция F голоморфна на окрестности U_0 .

Матрица Якоби по x в точке (t_0, x_0) является единичной:

$$\partial_x F(t, x)|_{(t_0, x_0)} = E.$$

Поэтому существует окрестность U_0 , на которой якобиан

$$\det \partial_x F(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in U_0.$$

Тем самым установлена функциональная независимость по x на U_0 координатных функций $F_i: U_0 \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, векторной функции F .

В соответствии с леммой 1

$$F(t, x(t; (t_0, x_*))) = x(t_0; (t, x(t; (t_0, x_*)))) = x_*.$$

Стало быть, функция F есть постоянный вектор вдоль решений системы (ICD).

Тогда, по теореме 1.1, функции

$$F_i: (t, x) \rightarrow F_i(t, x), \forall (t, x) \in U_0, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

будут первыми интегралами на U_0 системы (ICD). ■

Предложение 2. Пусть голоморфная система (ICD) имеет n функционально независимых на окрестности U_0 точки (t_0, x_0) первых интегралов (1). Тогда для всякого первого интеграла $\Psi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ системы (ICD) имеет место представление

$$\Psi(t, x) = \Phi(F(t, x)), \forall (t, x) \in U_0,$$

где Φ — некоторая скалярная функция, голоморфная на множестве значений $EF = \bigtimes_{i=1}^n EF_i$, а векторная функция

$$F: (t, x) \rightarrow (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x)), \forall (t, x) \in U_0.$$

Доказательство. У определяемых первыми интегралами (1) системы (ICD) функций

$$F_i: (t, x) \rightarrow x_i(t_0; (t, x)), \forall (t, x) \in U_0, i = \overline{1, n},$$

якобиан

$$\det \partial_x F(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in U_0.$$

Поэтому при фиксированном t функция F имеет обратную функцию S и

$$F(t, S(t, x)) = x, \forall (t, x) \in U_0. \quad (2)$$

При этом функция

$$\Phi: (t, x) \rightarrow \Psi(t, S(t, x)), \forall (t, x) \in U_0,$$

с первыми интегралами связана тождеством

$$\Psi(t, x) = \Phi(t, F(t, x)), \forall (t, x) \in U_0.$$

Докажем, что на U_0 функция Φ не зависит от t :

$$\partial_{t_j} \Phi(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in U_0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для этого тождество (2) продифференцируем по t :

$$\partial_{t_j} F(t, S(t, x)) + \partial_x F(t, S(t, x)) \partial_{t_j} S(t, x) = 0,$$

$$\forall (t, x) \in U_0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Функции (1) суть первые интегралы системы (ICD). Поэтому

$$\partial_{t_j} F(t, x) = -\partial_x F(t, x) X^j(t, x), \quad \forall (t, x) \in U_0, \quad j = \overline{1, m},$$

где

$$X^j(t, x) = (X_{1j}(t, x), \dots, X_{nj}(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда на окрестности U_0

$$\partial_x F(t, S(t, x)) (\partial_{t_j} S(t, x) - X^j(t, S(t, x))) \equiv 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Следовательно,

$$\partial_{t_j} S(t, x) = X^j(t, S(t, x)), \quad \forall (t, x) \in U_0, \quad j = \overline{1, m},$$

так как матрица $\partial_x F$ невырождена на U_0 .

С учётом того, что функция Ψ есть первый интеграл системы (ICD), имеем:

$$\begin{aligned} \partial_{t_j} \Phi(t, x) &= \partial_{t_j} \Psi(t, S(t, x)) + \partial_x \Psi(t, S(t, x)) \partial_{t_j} S(t, x) = \\ &= \partial_{t_j} \Psi(t, S(t, x)) + \partial_x \Psi(t, S(t, x)) X^j(t, S(t, x)) = 0, \end{aligned}$$

$$\forall (t, x) \in U_0, \quad j = \overline{1, m}. \blacksquare$$

Из предложений 1 и 2 следует

Теорема 1. *Голоморфная система (ICD) на окрестности любой точки области \mathcal{D} имеет базис первых интегралов размерности n .*

Пример 1. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned} dx_1 &= dt_1, & dx_2 &= dt_2, \\ dx_3 &= \partial_{x_1} g(x_1, x_2) dt_1 + \partial_{x_2} g(x_1, x_2) dt_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где скалярная функция g голоморфна на области \mathcal{X} из \mathbb{R}^2 , имеет на односвязной области $\mathcal{D}' = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ базис первых интегралов

$$\begin{aligned} F_1 &: (t, x) \rightarrow t_1 - x_1, \\ F_2 &: (t, x) \rightarrow t_2 - x_2, \\ F_3 &: (t, x) \rightarrow g(x_1, x_2) - x_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Действительно, в соответствии с определением 1.1 функции (4) являются первыми интегралами на области \mathcal{D}' системы (3).

Матрица Якоби

$$J(F_1, F_2, F_3; t, x) = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{x_1} g(x_1, x_2) & \partial_{x_2} g(x_1, x_2) & -1 \end{array} \right\|$$

на области \mathcal{D}' имеет

$$\text{rank } J(F_1, F_2, F_3; t, x) = 3.$$

Следовательно, первые интегралы (4) являются функционально независимыми на \mathcal{D}' .

Таким образом, по теореме 1, первые интегралы (4) образуют интегральный базис вполне разрешимой голоморфной системы уравнений в полных дифференциалах (3) на области \mathcal{D}' .

§ 3. Первые интегралы линейной однородной системы уравнений в частных производных

1. Базис первых интегралов

Линейная однородная система уравнений в частных производных. (∂). Первый интеграл. Приведение линейной однородной системы уравнений в частных производных, заданной посредством линейно связанных операторов, к равносильной линейной однородной системе уравнений в частных производных, заданной с помощью линейных операторов, не являющихся голоморфно линейно связанными. Первые интегралы в случае, когда количество уравнений совпадает с количеством независимых переменных. Соотношение между количеством независимых переменных и количеством уравнений, образующих систему. Функциональная неоднозначность первого интеграла. Базис первых интегралов и его размерность.

Дифференциальную систему

$$\mathfrak{L}_j(x)y = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\partial)$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_j(x) = \sum_{i=1}^n u_{ji}(x)\partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

назовём *линейной однородной системой уравнений в частных производных первого порядка*.

Систему (∂) будем рассматривать в предположении, что она задана с помощью линейных дифференциальных операторов (1), у которых координатные функции u_{ji} достаточное число раз непрерывно дифференцируемы на области \mathcal{X} .

Определение 1. *Непрерывно дифференцируемую на области \mathcal{X}' , $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, скалярную функцию $F: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ назовём **первым интегралом на области \mathcal{X}' системы (∂)**, если*

$$\mathfrak{L}_j F(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Условимся, что линейные дифференциальные операторы (1), посредством которых задана система (∂) , не являются линейно связанными на области \mathcal{X} .

Это требование в общем не сужает множество всех возможных систем (∂) .

Действительно, пусть совокупность операторов (1) линейно связана на области \mathcal{X} . Тогда матрица

$$u(x) = \|u_{ji}(x)\|_{m \times n}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

имеет ранг¹

$$\text{rank } u(x) = s(x), \quad 0 \leq s(x) < \min\{m, n\}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Выделим $s = \max_{\mathcal{X}} s(x)$ операторов совокупности (1), которые не будут линейно связанными на такой подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} , что дополнение $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}\mathcal{X}'$ имеет нулевую меру.

По этим операторам построим новую линейную однородную систему уравнений в частных производных, которая на области \mathcal{X}' интегрально равносильна исходной системе (∂) , но задана уже линейными дифференциальными операторами, не являющимися линейно связанными.

Пусть операторы (1) не являются линейно связанными на области \mathcal{X} . Тогда у матрицы (3) почти везде на области \mathcal{X} ранг

$$\text{rank } u(x) = m, \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

где множество \mathcal{X}' такое, что у его дополнения до множества \mathcal{X} мера $\mu \mathcal{C}_{\mathcal{X}}\mathcal{X}' = 0$.

И по необходимости $m \leq n$.

¹Если функциональная $(m \times n)$ -матрица $M \in C^1(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^s$, то существует такая подобласть \mathcal{G}' области \mathcal{G} , дополнение $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}\mathcal{G}'$ которой имеет нулевую меру в пространстве \mathbb{R}^s , что в каждой точке области \mathcal{G}' ранг матрицы M является числом постоянным:

$$\text{rank } M(z) = r, \quad \forall z \in \mathcal{G}', \quad 0 \leq r \leq \min\{m, n\},$$

а в каждой точке дополнения $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}\mathcal{G}'$ ранг матрицы M меньше числа r . При этом число r назовём *рангом* функциональной матрицы M на области \mathcal{G} .

Если $m = n$, то не являющиеся линейно связанными на области X операторы (1) предопределяют невырожденность почти везде на области X квадратной матрицы (3) порядка n .

В этом случае систему (∂) с помощью невырожденных алгебраических преобразований на подобласти X' области X приводим к виду

$$\partial_i y = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

У полученной системы функция

$$y: x \rightarrow C, \quad \forall x \in X',$$

где C — произвольная вещественная постоянная, будет первым интегралом.

Предложение 1. Если $m = n$, то система (∂) не имеет первых интегралов, отличных от тождественной постоянной.

Поэтому основным объектом нашего внимания будут системы (∂) с не являющимися линейно связанными на области X дифференциальными операторами (1) при $m < n$.

Теорема 1. Если функции

$$F_\xi: x \rightarrow F_\xi(x), \quad \forall x \in X', \quad \xi = \overline{1, k}, \quad (4)$$

являются первыми интегралами на подобласти X' области X системы (∂) , то и функция

$$\Psi: x \rightarrow \Phi(F(x)), \quad \forall x \in X',$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_k(x))$, $\forall x \in X'$, а Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, будет первым интегралом на области X' системы (∂) .

Действительно, по определению 1,

$$\mathfrak{L}_j F_\xi(x) = 0, \quad \forall x \in X', \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi = \overline{1, k}.$$

Следовательно, на области X'

$$\mathfrak{L}_j \Phi(F(x)) = \sum_{\xi=1}^k \partial_{F_\xi} \Phi(F)|_{F=F(x)} \mathfrak{L}_j F_\xi(x) \equiv 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad \blacksquare$$

Определение 2. Совокупность функционально независимых на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} первых интегралов (4) системы (∂) назовём **базисом первых интегралов** на области \mathcal{X}' системы (∂) , если у этой системы любой первый интеграл $\Psi: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде

$$\Psi(x) = \Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция на области $EF = \bigtimes_{\xi=1}^k EF_\xi$. Число k при этом назовём **размерностью** базиса первых интегралов на области \mathcal{X}' системы (∂) .

2. Основные классы систем

Полная система. Якобиева система. Полнота якобиевой системы. Нормальная система. $(N\partial)$. Якобиевость полной нормальной системы.

Определение 1. Систему (∂) назовём **полной** на области \mathcal{X} , если скобки Пуассона любых двух её операторов (1.1) представимы в виде линейной комбинации операторов \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$, с коэффициентами, непрерывно дифференцируемыми на \mathcal{X} :

$$[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x)] = \sum_{s=1}^m A_{jls}(x) \mathfrak{L}_s(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j, l = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Определение 2. Если скобки Пуассона операторов (1.1) симметричны на области \mathcal{X} , то систему (∂) назовём **якобиевой** на этой области.

Предложение 1. Якобиевая на области \mathcal{X} система (∂) является полной на этой области.

Доказательство. Симметричность на области \mathcal{X} скобок Пуассона операторов (1.1) равносильна тому, что

$$[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j, l = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Тождества (2) есть представления (1), у которых все коэффициенты $A_{jls}(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}$. ■

Определение 3. Дифференциальную систему

$$\partial_j y = \mathfrak{M}_j(x)y, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\text{N}\partial)$$

где

$$\mathfrak{M}_j(x) = \sum_{s=m+1}^n u_{js}(x) \partial_s, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

назовём **нормальной** линейной однородной системой уравнений в частных производных.

Предложение 2. Полная нормальная система якобиева.

Доказательство. Система (N\partial) является системой вида (\partial), у которой операторы

$$\mathfrak{L}_j(x) = \partial_j - \mathfrak{M}_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}.$$

На области \mathcal{X} скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l] &= [\partial_j - \mathfrak{M}_j, \partial_l - \mathfrak{M}_l] = \\ &= [\partial_j, \partial_l - \mathfrak{M}_l] - [\mathfrak{M}_j, \partial_l - \mathfrak{M}_l] = \\ &= -[\partial_j, \mathfrak{M}_l] - [\mathfrak{M}_j, \partial_l] + [\mathfrak{M}_j, \mathfrak{M}_l] = \\ &= - \sum_{s=m+1}^n \partial_j u_{ls} \partial_s + \sum_{s=m+1}^n \partial_l u_{js} \partial_s + \sum_{s=m+1}^n (\mathfrak{M}_j u_{ls} - \mathfrak{M}_l u_{js}) \partial_s = \\ &= \sum_{s=m+1}^n v_{jls} \partial_s, \quad j, l = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где коэффициенты $v_{jls}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, j, l = \overline{1, m}, s = \overline{m+1, n}$.

Если система $(N\partial)$ является полной, то на области \mathcal{X} имеют место представления (1):

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l] &= \sum_{s=1}^m A_{jls} \mathfrak{L}_s = \sum_{s=1}^m A_{jls} (\partial_s - \mathfrak{M}_s) = \\ &= \sum_{s=1}^m A_{jls} \partial_s - \sum_{s=1}^m A_{jls} \mathfrak{M}_s, \quad j, l = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Из полученных для скобок Пуассона $[\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l]$ тождеств следует, что коэффициенты

$$A_{jls}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j, l, s = \overline{1, m}.$$

Стало быть, если для операторов, индуцированных системой $(N\partial)$, имеют место представления (1), то выполняются тождества (2), а значит, система $(N\partial)$ является яковиевой. ■

3. Неполная система

Решения коммутаторного линейного однородного уравнения в частных производных. Система, дополненная коммутаторными уравнениями, и её решения. Дополнение неполной системы до полной. Дефект неполной системы.

Лемма 1. *Если функция $y \in C^2(\mathcal{X}')$ является первым интегралом на области \mathcal{X}' системы уравнений*

$$\mathfrak{L}_1(x)y = 0, \quad \mathfrak{L}_2(x)y = 0,$$

то она будет первым интегралом на \mathcal{X}' уравнения

$$[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)]y = 0.$$

Доказательство следует из совпадения действий скобок Пуассона и коммутатора на дважды непрерывно дифференцируемую функцию:

$$[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2]y(x) = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2y(x) - \mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1y(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}'. \quad \blacksquare$$

Непосредственным следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Если функция $y \in C^2(X')$ является первым интегралом на области X' системы (∂) , то она будет первым интегралом на этой области системы*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_j(x)y = 0, \quad [\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)]y = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{1, m_1}, \\ \mu = \overline{1, m_2}, \quad m_1 \leq m, \quad m_2 \leq m, \quad j_\nu, l_\mu \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку скобки Пуассона есть линейный дифференциальный оператор, то система (1) является линейной однородной.

Если система (∂) полная, то система (1) будет построенной на основании линейно связанных на области X операторов, даже если добавить к системе (∂) хотя бы одно уравнение вида

$$[\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)]y = 0, \quad j_\nu, l_\mu \in \{1, \dots, m\}. \quad (2)$$

Если система (∂) неполная, то некоторые операторы

$$\mathfrak{L}_{\tau\theta}(x) = [\mathfrak{L}_\tau(x), \mathfrak{L}_\theta(x)], \quad \tau, \theta \in \{1, \dots, m\},$$

не являются линейной комбинацией операторов \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$.

Присоединив к системе (∂) уравнения

$$\mathfrak{L}_{\tau\theta}(x)y = 0,$$

у которых операторы $\mathfrak{L}_{\tau\theta}$ не являются линейной комбинацией операторов \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$, составляем линейную однородную систему

$$\mathfrak{L}_s(x)y = 0, \quad s = \overline{1, k_1}, \quad m < k_1 \leq n, \quad (3)$$

так, что операторы \mathfrak{L}_s , $s = \overline{1, k_1}$, не являются линейно связанными на области X .

Существенно, что:

1) $k_1 > m$, то есть, система (∂) пополняется хотя бы одним уравнением;

2) пополнение системы (∂) до системы (3) производится за счёт добавления уравнений вида (2);

3) системы (∂) и (3) интегрально равносильны на любой под-области \mathcal{X}' области \mathcal{X} .

Если система (3) полная, то процесс завершён.

Если же система (3) окажется неполной, то аналогичную процедуру проводим с системой (3), и получаем ещё одну систему.

Заметим, что после каждого такого шага количество уравнений системы увеличивается по крайней мере на одно. Поэтому, продолжая так далее, получим, после конечного числа шагов, или полную систему, или систему из n уравнений.

Учтём и такие обстоятельства. Во-первых, система (∂) при $m = n$ в соответствии с определением 1.2 относится к классу полных систем.

Это обосновано тем, что совокупность n линейных дифференциальных операторов, зависящих от n переменных и не являющихся линейно связанными на области \mathcal{X} из n -мерного пространства \mathbb{R}^n , образует базис линейных дифференциальных операторов на области \mathcal{X} .

Поэтому в результате описанной процедуры можно сказать, что всякая неполная система (∂) за конечное число шагов приводится к полной системе.

Во-вторых, приведение неполной системы (∂) к полной системе осуществляется путём добавления линейных однородных уравнений в частных производных видов

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)]y = 0, \quad [\mathfrak{L}_{\alpha_\xi}(x), [\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)]]y = 0, \\ [\mathfrak{L}_{\beta_\zeta}(x), [\mathfrak{L}_{\alpha_\xi}(x), [\mathfrak{L}_{j_\nu}(x), \mathfrak{L}_{l_\mu}(x)]]]y = 0, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\nu = \overline{1, m_1}, \quad \mu = \overline{1, m_2}, \quad \xi = \overline{1, m_3}, \quad \zeta = \overline{1, m_4}, \dots, \quad m_s \leq m,$$

$$s = 1, 2, \dots, \quad \{1, \dots, m\} \ni j_\nu, l_\mu, \alpha_\xi, \beta_\zeta, \dots$$

Всё это позволяет сделать следующий вывод.

Предложение 1. *Всякая неполная система (∂) на области \mathcal{X} приводится к интегрально равносильной ей полной системе.*

В свою очередь эта закономерность предоставляет возможность ввести следующее понятие для неполных систем.

Определение 1. Число r назовём **дефектом** неполной системы (∂) , если эта система на области X приводится к интегрально равносильной ей полной системе путём добавления r уравнений видов (4).

В этом определении предполагается, что выполняется ранее оговоренное соглашение, по которому полная система, к которой приводится неполная система (∂) , построена на основании не являющихся линейно связанными на области X операторов.

Очевидно, что для неполной системы (∂) дефект r такой, что

$$0 < r \leq n - m.$$

Если условиться, что полная система имеет дефект $r = 0$, то относительно любой системы (∂) можно сказать, что она имеет дефект r при

$$0 \leq r \leq n - m.$$

4. Полная система

Инвариантность полной системы при голоморфизме. Инвариантность якобиевой системы при голоморфизме. Инвариантность полноты системы при линейном невырожденном преобразовании операторов, посредством которых она задана. Приведение полной системы к локально равносильной полной нормальной (якобиевой) системе. Область нормализации. Неоднозначность области нормализации.

Свойство 1. Полная линейная однородная система уравнений в частных производных инвариантна при голоморфизме.

Доказательство. Пусть отображение

$$x: \xi \rightarrow \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in \tilde{X}, \quad \tilde{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

устанавливает голоморфизм между областями X и \tilde{X} из \mathbb{R}^n .

Выражение $\mathfrak{L}_j(x)y(x)$ инвариантно при голоморфизме (1):

$$\mathfrak{L}_j(x)y(x)|_{x=\varphi(\xi)} = \tilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)z(\xi), \quad \forall \xi \in \tilde{X}, \quad \forall x \in X, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где

$$z(\xi) = y(\varphi(\xi)), \quad \forall \xi \in \tilde{\mathcal{X}}.$$

Поэтому заменой (1) систему (∂) приводим к системе

$$\tilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)z = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Линейные дифференциальные операторы $\tilde{\mathfrak{L}}_j$, $j = \overline{1, m}$, ввиду взаимной однозначности голоморфизма не являются линейно связанными на области $\tilde{\mathcal{X}}$.

Докажем полноту системы (3) на области $\tilde{\mathcal{X}}$ при условии, что система (∂) является полной на области \mathcal{X} .

С учётом (2) имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_j(x)\mathfrak{L}_l(x)y(x)|_{x=\varphi(\xi)} &= \mathfrak{L}_j(x)v_l(x)|_{x=\varphi(\xi)} = \tilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)v_l(\varphi(\xi)) = \\ &= \tilde{\mathfrak{L}}_j(\xi)\tilde{\mathfrak{L}}_l(\xi)z(\xi), \quad \forall \xi \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j, l = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где

$$v_l(x) = \mathfrak{L}_l y(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, m}.$$

Поэтому при любых ξ из области $\tilde{\mathcal{X}}$

$$\left[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x) \right] y(x)|_{x=\varphi(\xi)} = \left[\tilde{\mathfrak{L}}_j(\xi), \tilde{\mathfrak{L}}_l(\xi) \right] z(\xi), \quad j, l = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Для системы (∂) имеет место представление скобок Пуассона в виде (1.2).

Следовательно, на $\tilde{\mathcal{X}}$ при $j, l = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathfrak{L}}_j(\xi), \tilde{\mathfrak{L}}_l(\xi) \right] z(\xi) &= \left[\mathfrak{L}_j(x), \mathfrak{L}_l(x) \right] y(x)|_{x=\varphi(\xi)} = \\ &= \sum_{s=1}^m A_{jls}(x)\mathfrak{L}_s(x)y(x)|_{x=\varphi(\xi)} = \sum_{s=1}^m \tilde{A}_{jls}(\xi)\tilde{\mathfrak{L}}_s(\xi)z(\xi). \blacksquare \end{aligned}$$

Из соотношений (2.2) и (4) следует

Свойство 2. *Якобиева линейная однородная система уравнений в частных производных инвариантна при голоморфизме.*

Свойство 3. *Полная система (∂) с помощью линейной невырожденной на области \mathcal{X} замены операторов*

$$\mathfrak{L}_j(x) = \sum_{l=1}^m \psi_{jl}(x) \mathfrak{Q}_l(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где линейные дифференциальные операторы \mathfrak{Q}_l , $l = \overline{1, m}$, и скалярные функции $\psi_{jl}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j, l = \overline{1, m}$, голоморфны на области \mathcal{X} , приводится в окрестности любой точки $x \in \mathcal{X}$, в которой $\det \|\psi_{jl}(x)\| \neq 0$, к интегрально равносильной ей полной системе разве что на сужении области \mathcal{X} .

Доказательство. В силу невырожденности линейной замены (5) линейные дифференциальные операторы \mathfrak{Q}_l , $l = \overline{1, m}$, линейным образом выражаются через операторы (1.1)

$$\mathfrak{Q}_l(x) = \sum_{j=1}^m \theta_{lj}(x) \mathfrak{L}_j(x), \quad l = \overline{1, m}, \quad (6)$$

а система (∂) приводится к системе

$$\sum_{l=1}^m \psi_{jl}(x) \mathfrak{Q}_l(x) y = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

и распадается на систему уравнений вида (∂)

$$\mathfrak{Q}_l(x) y = 0, \quad l = \overline{1, m}. \quad (8)$$

При этом в разложении (6) происходит разве лишь сужение области \mathcal{X} за счёт точек, в которых $\det \psi(x) = 0$, где квадратная матрица $\psi(x) = \|\psi_{jl}(x)\|$, $\forall x \in \mathcal{X}$, имеет порядок m .

Из представления (7) и невырожденности матрицы ψ следует интегральная равносильность на области \mathcal{X} систем (8) и (∂) .

Докажем полноту системы (8).

Пусть α и β — скалярные функции. На основании тождеств

$$[\alpha \mathfrak{L}_j, \beta \mathfrak{L}_l] = \alpha \beta [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l] + \alpha \mathfrak{L}_j \beta \mathfrak{L}_l - \beta \mathfrak{L}_l \alpha \mathfrak{L}_j$$

и

$$[\mathfrak{K} + \mathfrak{L}, \mathfrak{M}] = [\mathfrak{K}, \mathfrak{M}] + [\mathfrak{L}, \mathfrak{M}]$$

с учётом (6) получаем, что

$$[\mathfrak{Q}_\mu, \mathfrak{Q}_\nu] = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m A_{jl} [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l] + \sum_{s=1}^m B_s \mathfrak{L}_s, \quad \mu, \nu = \overline{1, m}.$$

Отсюда, используя соотношения (1.2) и замену (5), устанавливаем, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{Q}_\mu, \mathfrak{Q}_\nu], \quad \mu, \nu = \overline{1, m},$$

представимы линейной комбинации операторов $\mathfrak{Q}_l, l = \overline{1, m}$.

Это означает полноту системы (8). ■

Из свойства 3 следует

Свойство 4. Если система (∂) — полная, то система

$$\mathfrak{K}_j(x)y = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

где

$$\mathfrak{K}_j(x) = \sum_{l=1}^m v_{jl}(x) \mathfrak{L}_l(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (10)$$

а квадратная матрица m -го порядка $v(x) = \|v_{jl}(x)\|$ невырождена в области \mathcal{X} , также является полной и интегрально равносильна системе (∂) на окрестности любой точки x области \mathcal{X} , в которой $\det v(x) \neq 0$.

Теорема 1. Полная система (∂) линейной невырожденной в области \mathcal{X} заменой операторов (1.1) приводится к полной нормальной системе (при этом происходит разве лишь сужение области \mathcal{X}).

Доказательство. Пусть система (∂) полная. Тогда квадратная матрица

$$\hat{u}(x) = \|u_{ji}(x)\|, \quad \forall x \in X,$$

порядка m , составленная из первых m столбцов матрицы (3.1), является невырожденной на области X (чего добиваемся всегда перенумерованием переменных, ибо почти везде на области X матрица (3.1) имеет ранг $\text{rank } u(x) = m$).

Это означает, что существует линейное невырожденное преобразование операторов (1.1), посредством которого систему (∂) приводим к виду $(N\partial)$, то есть, к нормальной системе.

То, что полученная нормальная система является полной, следует из свойства 4. ■

Заметим, что, приводя систему (∂) к полной нормальной системе $(N\partial)$, по необходимости осуществляем деление на $\det \hat{u}(x)$ (при построении линейного невырожденного преобразования операторов).

Это могло повлечь сужение области X из-за удаления из неё точек, являющихся нулями определителя $\det \hat{u}(x)$.

Если же в каждой точке области X определитель $\det \hat{u}(x)$ не обращается в нуль, то сужение области X не происходит.

Из теоремы 1 и предложения 2.2 следует

Теорема 2. *Полная система (∂) линейной невырожденной на области X заменой операторов (1.1) приводится к якобиевой линейной однородной системе уравнений в частных производных (при этом происходит разве лишь сужение области X).*

Относительно равносильности полной системы (∂) и полной нормальной системы, к которой она приводится, если учесть свойство 3 (или свойство 4) и процесс построения такой полной нормальной системы, описанный при доказательстве теоремы 1, можно утверждать

Теорема 3. *Пусть полная система (∂) такова, что квадратная матрица \hat{u} порядка m , составленная из m первых столбцов матрицы (3.1), является невырожденной на области X . Тогда полная система (∂) приводится к полной нормальной системе вида $(N\partial)$, причём в окрестности любой*

точки x из области \mathcal{X} , в которой $\det \hat{u}(x) \neq 0$, эти системы интегрально равносильны.

Эта теорема и предложение 1.3 позволяют ввести

Определение 1. Подобласть \mathcal{H} области \mathcal{X} назовём **областью нормализации** системы (∂) , если в окрестности каждой точки области \mathcal{H} система (∂) приводится к интегрально равносильной полной нормальной системе.

При этом под областью нормализации неполной системы будем понимать область нормализации интегрально равносильной ей полной системы (см. предложение 1.3).

Область нормализации устанавливается, вообще говоря, неоднозначно. Она зависит от нулей определителей $\det \hat{u}(x)$ квадратных матриц \hat{u} порядка m , составленных из m столбцов (не обязательно первых) матрицы (3.1).

Пример 1. Система

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1(x)y &\equiv x_1\partial_1y + x_2\partial_2y + x_3\partial_3y + x_4\partial_4y + x_5\partial_5y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(x)y &\equiv x_1\partial_1y + x_2\partial_2y + x_3\partial_3y + x_4^2\partial_4y + x_5^2\partial_5y = 0\end{aligned}\tag{11}$$

неполная, так как скобки Пуассона

$$[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] = x_4^2\partial_4 + x_5^2\partial_5 \equiv \mathfrak{L}_3(x)$$

не являются линейной комбинацией операторов \mathfrak{L}_1 и \mathfrak{L}_2 на \mathbb{R}^5 .

С помощью оператора \mathfrak{L}_3 систему (11) дополняем до интегрально равносильной системы

$$\mathfrak{L}_1(x)y = 0, \mathfrak{L}_2(x)y = 0, \mathfrak{L}_3(x)y = 0.\tag{12}$$

Поскольку

$$[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] = \mathfrak{L}_3, [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_3] = \mathfrak{L}_3, [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3] = \mathfrak{D} \quad \text{на } \mathbb{R}^5,$$

то система (12) полная.

Следовательно, в пространстве \mathbb{R}^5 неполная система (11) имеет дефект $r = 1$.

Из второго уравнения системы (12) в силу третьего уравнения этой же системы получаем

$$x_1\partial_1y + x_2\partial_2y + x_3\partial_3y = 0.\tag{13}$$

Тогда из первого уравнения системы (11) имеем, что

$$x_4 \partial_4 y + x_5 \partial_5 y = 0.$$

А из этого уравнения и третьего уравнения системы (12) получаем равенства

$$\partial_4 y = 0, \quad \partial_5 y = 0.$$

Разрешая уравнение (13) относительно $\partial_1 y$, систему (12) приводим к нормальной системе

$$\partial_1 y = -\frac{x_2}{x_1} \partial_2 y - \frac{x_3}{x_1} \partial_3 y, \quad \partial_4 y = 0, \quad \partial_5 y = 0,$$

интегрально равносильной системам (11) и (12) на области нормализации, которой является любая область пространства \mathbb{R}^5 с ненулевой первой координатой.

Легко указать ещё два нормальных вида систем (11) и (12), которые получаются разрешением уравнения (13) относительно $\partial_2 y$ и $\partial_3 y$.

5. Размерность базиса первых интегралов

Система уравнений в полных дифференциалах, ассоциированная к нормальной линейной однородной системе уравнений в частных производных. Равносильность нормальной системы и ассоциированной системы уравнений в полных дифференциалах. Критерий полноты (якобиевости) нормальной системы уравнений в частных производных. Размерность локального базиса первых интегралов полной нормальной системы. Размерность локального базиса первых интегралов полной системы. Размерность локального базиса первых интегралов неполной системы. Критерий полноты системы на основе размерности базиса её первых интегралов. Отсутствие первых интегралов у неполной системы с количеством уравнений на единицу меньше количества независимых переменных. Общий базис первых интегралов у неполной системы (∂) и соответствующей ей полной системы (∂^) .*

Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_s = - \sum_{j=1}^m u_{js}(x) dx_j, \quad s = \overline{m+1, n}, \quad (1)$$

является ассоциированной к нормальной линейной однородной системе уравнений в частных производных $(N\partial)$.

Для системы (1), как системы вида (CD), линейные дифференциальные операторы \mathfrak{X}_j , $j = \overline{1, m}$, имеют вид:

$$\mathfrak{X}_j(x) = \mathfrak{L}_j(x) = \partial_j - \mathfrak{M}_j(x), \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где операторы \mathfrak{M}_j задаются формулой (3.2).

Из (2) следует идентичность тождеств (2.1.2) и (2.1) для функции $F: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$.

Тем самым устанавливаем интегральную равносильность нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных и системы уравнений в полных дифференциалах.

Предложение 1. *Функция $F: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ является первым интегралом на области \mathcal{X}' нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных $(N\partial)$, если и только если она является первым интегралом на этой области системы уравнений в полных дифференциалах (1).*

Используя понятия полноты и якобиевости для линейной однородной системы уравнений в частных производных (∂) , а также понятие полной разрешимости для системы уравнений в полных дифференциалах (CD), приходим к заключению, по которому устанавливаем связь между этими понятиями.

Предложение 2. *Нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных $(N\partial)$ является полной (якобиевой) тогда и только тогда, когда система уравнений в полных дифференциалах (1) является вполне разрешимой.*

По теореме 1.3.2 и предложению 1 находим размерность базиса первых интегралов полной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Предложение 3. *Полная (якобиева) система $(N\partial)$ в окрестности каждой точки из области \mathcal{X} имеет базис первых интегралов размерности $n - m$.*

В соответствии с определением 1.4 на основании теоремы 3.4 и предложения 3 находим размерность базиса первых интегралов полной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Свойство 1. *Полная линейная однородная система уравнений в частных производных (∂) в окрестности каждой точки из её области нормализации имеет базис первых интегралов размерности $n - m$.*

Непосредственно по предложению 1.3 (с учётом определения 1.3) и свойству 1 устанавливаем размерность базиса первых интегралов неполной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Свойство 2. *Неполная линейная однородная система уравнений в частных производных (∂) с дефектом r в окрестности каждой точки из её области нормализации имеет базис первых интегралов размерности $n - m - r$.*

Из свойства 2 получаем

Следствие 1. *Неполная система (∂) , состоящая из $n - 1$ уравнений с n неизвестными, не имеет первых интегралов, отличных от произвольной постоянной.*

На основании свойств 1 и 2 находим размерность базиса первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Теорема 1. *Линейная однородная система уравнений в частных производных (∂) с дефектом r , $0 \leq r \leq n - m$, в окрестности каждой точки из её области нормализации имеет базис первых интегралов размерности $n - m - r$.*

Из теоремы 1 получаем следующий критерий полноты линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Предложение 4. *Линейная однородная система уравнений в частных производных (∂) является полной тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки из её области нормализации она имеет базис первых интегралов размерности $n - m$.*

Для последующих рассуждений удобно принять

Соглашение 1. *Через $\mathfrak{L}_\nu^*(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\nu = \overline{1, r}$, обозначим линейные дифференциальные операторы, которые построены на основании линейных дифференциальных операторов (1.1) по закону (4.3) и посредством которых система (∂) доопределяется до полной.*

При этом наряду с дифференциальной системой (∂) будем рассматривать полную линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_j(x)y &= 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ \mathfrak{L}_\nu^*(x)y &= 0, \quad \nu = \overline{1, r},\end{aligned}\tag{*}$$

где r — дефект системы (∂) , $0 \leq r \leq n - m$.

Причём операторы \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$, и \mathfrak{L}_ν^* , $\nu = \overline{1, r}$, не являются линейно связанными на области \mathcal{X} .

Если $r = 0$, то система (∂) имеет вид (∂) .

Из теоремы 1 и предложения 1.3 получаем

Предложение 5. *Функции*

$$F_\varepsilon: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon = \overline{1, n - m - r},$$

образуют базис первых интегралов на области \mathcal{X}' системы (∂) с дефектом r , $0 \leq r \leq n - m$, тогда и только тогда, когда они являются базисом первых интегралов на этой области системы (∂) .

Пример 1. *Функции*

$$F_1: x \rightarrow \frac{x_2}{x_1}, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad \text{и} \quad F_2: x \rightarrow \frac{x_3}{x_1}, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}},$$

на любой области $\tilde{\mathcal{X}}$ из множества $\mathbb{R}^5 \setminus \{x: x_1 \neq 0\}$ образуют базис первых интегралов как полной системы (12.4) (по свойству 1, поскольку $n - m = 5 - 3 = 2$), так и интегрально равносильной ей неполной системы (11.4) с дефектом $r = 1$ (по предложению 5).

§ 4. Размерность базиса первых интегралов не вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

Нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных, ассоциированная к системе уравнений в полных дифференциалах. Равносильность системы уравнений в полных дифференциалах и ассоциированной нормальной линейной однородной системы уравнений в частных производных. Размерность локального базиса первых интегралов не вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах. Размерность базиса первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (общий случай). Дефект и область разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах. Построение вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах интегрально равносильной не вполне разрешимой.

Ассоциированная к системе уравнений в полных дифференциалах (CD) линейная однородная система уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial_j y = - \sum_{\tau=m+1}^{m+n} X_{\tau-m,j}(z) \partial_\tau y, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где $z = (z_1, \dots, z_{m+n})$, является нормальной на области $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{m+n}$.

Вполне очевидно (по определениям 1.1.2 и 1.1.3), что системы (CD) и (1) интегрально равносильны на области \mathcal{G} в том смысле, что у них одни и те же первые интегралы на этой области.

В соответствии с предложением 2.5.3 система (CD) вполне разрешима тогда и только тогда, когда система (1) полная.

В этом случае известно, что у них базис первых интегралов имеет размерность n (см. теорему 1.3.2 и свойство 1.5.3).

В случае, когда система (CD) является не вполне разрешимой, дополним систему (1) до полной. Тем самым установим её дефект r при $0 < r \leq n$. У полученной полной системы найдём область нормализации.

Тогда, по свойству 2.5.3, имеет место

Предложение 1. *Не вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (CD) в окрестности любой*

точки из области нормализации ассоциированной к ней линейной однородной (неполной) системы уравнений в частных производных (1) имеет базис первых интегралов размерности $n - r$, где r — дефект системы (1).

Если учесть соглашение (см. п. 3, § 3) о том, что у полной системы (1) дефект $r = 0$, то приходим к обобщающему утверждению (по отношению к теореме 1.3.2 и предложению 1) о базисе первых интегралов системы (CD), когда она является или нет вполне разрешимой.

Предложение 2. Система уравнений в полных дифференциалах (CD) в окрестности любой точки из области нормализации ассоциированной к ней линейной однородной системы уравнений в частных производных (1) имеет базис первых интегралов размерности $n - r$, где r — дефект системы (1), $0 \leq r \leq n$.

Это позволяет ввести понятие дефекта и понятие области разрешимости для не вполне разрешимой системы (CD), а также предложение 2 (и предложение 1 как частный случай) сформулировать с использованием введённых понятий.

Определение 1. Система уравнений в полных дифференциалах (CD) имеет **дефект** r , $0 \leq r \leq n$, если r является дефектом ассоциированной линейной однородной системы уравнений в частных производных (1). При этом область нормализации системы (1) назовём **областью разрешимости** системы (CD).

Теорема 1. Система уравнений в полных дифференциалах (CD) с дефектом r , $0 \leq r \leq n$, в окрестности любой точки из области разрешимости имеет базис первых интегралов размерности $n - r$.

Пусть система (CD) имеет дефект r , $0 \leq r < n$. Линейную однородную систему уравнений в частных производных (1), ассоциированную к системе (CD), доопределим до полной

$$\begin{aligned} \partial_{t_j} y + \sum_{i=1}^n X_{ij}(t, x) \partial_{x_i} y &= 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^n X_{i\nu}^*(t, x) \partial_{x_i} y &= 0, \quad \nu = \overline{1, r}, \end{aligned} \tag{1}^*$$

где функции $X_{i\nu}^*$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{1, r}$, получены на основании функций X_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, в соответствии с законом (4.3.3).

Систему (1) приведём к нормальному виду и построим ассоциированную к ней систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_{k_\delta} = \sum_{j=1}^m G_{k_\delta j}(t, x) dt_j + \sum_{\mu=n-r+1}^n G_{k_\delta k_\mu}(t, x) dx_{k_\mu}, \quad (2)$$

$$\delta = \overline{1, n-r}, \quad k_\nu, k_\mu \in \{1, \dots, n\}, \quad k_i \neq k_\xi, \quad i, \xi = \overline{1, n}, \quad i \neq \xi.$$

Система (2) является вполне разрешимой на области нормализации системы (1) из пространства \mathbb{R}^{m+n} .

Система (2) по отношению к системе (CD) предполагает расширение координатного пространства Ot на r координат за счёт r координат пространства Ox .

Такое перераспределение зависимых переменных и независимых переменных позволяет в исходной системе уравнений в полных дифференциалах (CD) перенумеровать лишь зависимые переменные так, что система (2) будет иметь вид

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m+r} H_{ij}(t_1, \dots, t_{m+r}, x_1, \dots, x_{n-r}) dt_j, \quad i = \overline{1, n-r}, \quad (3)$$

где $t_{m+\nu} = x_{n-r+\nu}$, $\nu = \overline{1, r}$.

Эта система является вполне разрешимой на области \mathcal{G}^* из пространства \mathbb{R}^{m+n} , причём \mathcal{G}^* есть область разрешимости системы (CD) и есть область нормализации систем (1) и (1).

Переход от системы (CD) к системе (3) связан со следующей закономерностью, основанной на том, что системы (CD) и (3) имеют одинаковый базис первых интегралов на области разрешимости, то есть, являются интегрально равносильными.

Предложение 3. Система уравнений в полных дифференциалах (CD) с координатными пространствами Ot и Ox и дефектом r , $0 \leq r < n$, на некоторой области (область разрешимости) интегрально равносильна вполне разрешимой системе с координатными пространствами $Ot_1 \dots t_{m+r}$ и $Ox_1 \dots x_{n-r}$, где $t_{m+\nu} = x_{n-r+\nu}$, $\nu = \overline{1, r}$ (с точностью до нумерации зависимых переменных x_1, \dots, x_n).

Система уравнений в полных дифференциалах (3.1.2), не будучи вполне разрешимой, может иметь не более одного первого интеграла (с точностью до функциональной независимости).

Стало быть, система (3.1.2) имеет базис первых интегралов, состоящий из одного первого интеграла (4.1.2).

Пример 1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_1 = x_1 dt_1 + x_2 dt_2, \quad dx_2 = 2x_2 dt_1 + x_1 dt_2 \quad (4)$$

не является вполне разрешимой, ибо скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\mathfrak{X}_1(t, x), \mathfrak{X}_2(t, x)] &= [\partial_{t_1} + x_1 \partial_{x_1} + 2x_2 \partial_{x_2}, \partial_{t_2} + x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}] = \\ &= x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} \equiv \mathfrak{X}_3(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

не обращаются в тождественный нуль ни на какой четырёхмерной области пространства \mathbb{R}^4 .

Система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1(z)y &\equiv \partial_1 y + z_3 \partial_3 y + 2z_4 \partial_4 y = 0, \\ \mathfrak{Z}_2(z)y &\equiv \partial_2 y + z_4 \partial_3 y + z_3 \partial_4 y = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

ассоциированная к системе (4), является неполной.

Доопределим систему (5) путём присоединения к ней уравнения

$$\mathfrak{Z}_3(z)y \equiv z_4 \partial_3 y - z_3 \partial_4 y = 0. \quad (6)$$

Поскольку скобки Пуассона

$$[\mathfrak{Z}_1(z), \mathfrak{Z}_3(z)] = z_4 \partial_3 + z_3 \partial_4, \quad \forall z \in \mathbb{R}^4,$$

не являются линейной комбинацией операторов \mathfrak{Z}_1 , \mathfrak{Z}_2 и \mathfrak{Z}_3 , то линейная однородная система уравнений в частных производных, состоящая из уравнений (5) и (6), — неполная.

В соответствии со следствием 1.5.3 она не имеет первых интегралов. Значит, система (5) тоже не имеет первых интегралов (у неполной системы (5) дефект $r = 2$).

Поэтому нет первых интегралов и у системы (4) ($n - r = 2 - 2 = 0$).

Пример 2. Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_1 = x_1 dt_1 + x_1^2 dt_2, \quad dx_2 = x_2^2 dt_1 + x_2^3 dt_2 \quad (7)$$

такова, что скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\mathfrak{X}_1(t, x), \mathfrak{X}_2(t, x)] &= [\partial_{t_1} + x_1 \partial_{x_1} + x_2^2 \partial_{x_2}, \partial_{t_2} + x_1^2 \partial_{x_1} + x_2^3 \partial_{x_2}] = \\ &= x_1^2 \partial_{x_1} + x_2^4 \partial_{x_2} \equiv \mathfrak{X}_3(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

не являются нуль-оператором ни на какой четырёхмерной области пространства \mathbb{R}^4 . Поэтому система (7) не вполне разрешима.

Операторы \mathfrak{X}_j , $j = \overline{1, 4}$, где

$$\mathfrak{X}_4(t, x) = [\mathfrak{X}_2(t, x), \mathfrak{X}_3(t, x)] = x_2^6 \partial_{x_2}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

не являются линейно связанными на \mathbb{R}^4 .

Следовательно, ассоциированная к системе (7) линейная однородная (неполная) система уравнений в частных производных

$$\partial_1 y + z_3 \partial_3 y + z_4^2 \partial_4 y = 0, \quad \partial_2 y + z_3^2 \partial_3 y + z_4^3 \partial_4 y = 0 \quad (8)$$

имеет дефект $r = 2$.

Отсюда заключаем:

1) система (8) не имеет первых интегралов, отличных от тождественной постоянной (в соответствии со свойством 2.5.3 при $n - m - r = 4 - 2 - 2 = 0$);

2) для системы (7) $n - r = 2 - 2 = 0$, и у неё нет первых интегралов (по теореме 1).

Замечание 1. Система (7) может служить примером ситуации, когда система (CD) при отсутствии первых интегралов имеет частные интегралы (см. § 2, гл. 2).

Частными интегралами системы (7) являются функции

$$w_1: (t, x) \rightarrow x_1, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4, \quad \text{и} \quad w_2: (t, x) \rightarrow x_2, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4.$$

Пример 3. Система в частных производных

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1(z)y &\equiv \partial_1 y + z_3 \partial_3 y + (1 + z_3 + 2z_4) \partial_4 y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(z)y &\equiv \partial_2 y + 3z_3 \partial_3 y + (z_3 + 3z_4) \partial_4 y = 0\end{aligned}\tag{9}$$

является ассоциированной к не вполне разрешимой системе (3.1.2), и поэтому система (9) является неполной.

Поскольку скобки Пуассона

$$\begin{aligned}[\mathfrak{L}_1(z), \mathfrak{L}_2(z)] &= (3 - z_3) \partial_4 \equiv \mathfrak{L}_3(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^4, \\ [\mathfrak{L}_1(z), \mathfrak{L}_3(z)] &= \frac{z_3 - 6}{3 - z_3} \mathfrak{L}_3(z), \quad \forall z \in \{z: z_3 \neq 3\}, \\ [\mathfrak{L}_2(z), \mathfrak{L}_3(z)] &= -\frac{9}{3 - z_3} \mathfrak{L}_3(z), \quad \forall z \in \{z: z_3 \neq 3\},\end{aligned}$$

то у системы (9) дефект $r = 1$.

По теореме 1, не вполне разрешимая система (3.1.2) обладает базисом первых интегралов размерности $n - r = 2 - 1 = 1$, состоящим из первого интеграла (4.1.2).

Интегральная равносильность систем (9) и (3.1.2) на пространстве \mathbb{R}^4 позволяет на основании базиса первых интегралов (4.1.2) системы (3.1.2) построить базис первых интегралов

$$Z: z \rightarrow z_3 \exp(-z_1 - 3z_2), \quad \forall z \in \mathbb{R}^4,$$

линейной однородной системы уравнений в частных производных (9).

Пример 4. Система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \frac{t_2 - 1}{t_1(t_2 - t_1)} x_i dt_1 - \frac{t_1 - 1}{t_2(t_2 - t_1)} x_i dt_2, \quad i = \overline{1, 3},\tag{10}$$

имеет два функционально независимых первых интеграла

$$F_1: (t, x) \rightarrow \frac{x_2}{x_1} \quad \text{и} \quad F_2: (t, x) \rightarrow \frac{x_3}{x_1}\tag{11}$$

на любой области \mathcal{D}' из множества $\mathcal{W} = \{(t, x): t_1 t_2 (t_2 - t_1) x_1 \neq 0\}$.

Система (10) не вполне разрешимая, так как в выражениях

$$d \ln x_i = \frac{t_2 - 1}{t_1(t_2 - t_1)} dt_1 - \frac{t_1 - 1}{t_2(t_2 - t_1)} dt_2$$

правая часть не является полным дифференциалом. А значит, у неё нет решений.

Ассоциированная к системе (10) нормальная линейная однородная система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \partial_1 u + \frac{y_3(y_2 - 1)}{y_1(y_2 - y_1)} \partial_3 u + \frac{y_4(y_2 - 1)}{y_1(y_2 - y_1)} \partial_4 u + \frac{y_5(y_2 - 1)}{y_1(y_2 - y_1)} \partial_5 u &= 0, \\ \partial_2 u + \frac{y_3(y_1 - 1)}{y_2(y_1 - y_2)} \partial_3 u + \frac{y_4(y_1 - 1)}{y_2(y_1 - y_2)} \partial_4 u + \frac{y_5(y_1 - 1)}{y_2(y_1 - y_2)} \partial_5 u &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

является неполной.

При соответствующем выборе переменных линейная однородная система уравнений в частных производных (11.4.3) приводится к нормальному виду (12) (у системы (11.4.3) выражаются $\partial_4 u$ и $\partial_5 u$).

Используя результат примера 1.4.3, устанавливаем, что система (12) имеет дефект $r = 1$.

Поэтому для системы (10) разность $n - r = 3 - 1 = 2$, и, стало быть, функции (11) образуют базис первых интегралов на всякой области \mathcal{D}' из множества \mathcal{W} этой не вполне разрешимой системы.

Неполная нормальная система (12), соответственно, имеет базис первых интегралов

$$\Phi_1: y \rightarrow \frac{y_4}{y_3}, \quad \forall y \in \mathcal{Y}, \quad \text{и} \quad \Phi_2: y \rightarrow \frac{y_5}{y_3}, \quad \forall y \in \mathcal{Y},$$

на всякой области $\mathcal{Y} \subset \{y: y_1 y_2 y_3 (y_2 - y_1) \neq 0\}$ из пространства \mathbb{R}^5 , такой же размерности $n - m - r = 5 - 2 - 1 = 2$ (см. пример 1.5.3).

§ 5. Метод Якоби построения базиса первых интегралов

Метод Якоби построения базиса первых интегралов яковиевой линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных (∂). Распространение метода Якоби построения базиса первых интегралов на полные системы (∂). Метод Якоби построения базиса первых интегралов вполне разрешимых систем уравнений в полных дифференциалах.

1. Интегрирование яковиевой линейной однородной системы уравнений в частных производных

Рассматриваемый метод построения базиса первых интегралов линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных пригоден лишь для яковиевых систем, то есть, для таких систем (∂), у которых линейные дифференциальные операторы (1.1.3) попарно связаны коммутаторными тождествами (2.2.3).

Этот метод интегрирования будем называть *методом Якоби*. Он состоит в последовательном интегрировании линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных, входящих в задание яковиевой системы (∂).

Возьмём, например, первое уравнение яковиевой линейной однородной системы уравнений в частных производных (∂)

$$\mathfrak{L}_1(x)y = 0 \quad (1)$$

и построим его базис первых интегралов

$$H_\xi^1: x \rightarrow H_\xi^1(x), \forall x \in \mathcal{X}', \xi = \overline{2, n}, \quad (2)$$

на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} из \mathbb{R}^n .

Не умаляя общности, будем считать, что у линейного дифференциального оператора \mathfrak{L}_1 первая координата u_{11} не является тождественным нулём на области \mathcal{X} пространства \mathbb{R}^n (в противном случае этого всегда можно добиться перенумерованием переменных $x_i, i = \overline{1, n}$).

Выполним в якобиевой системе (∂) замену

$$x_1^1 = x_1, \quad x_\xi^1 = H_\xi^1(x), \quad \xi = \overline{2, n}, \quad \forall x \in \mathcal{X}'. \quad (3)$$

Так как на области \mathcal{X}'

$$\partial_{x_i} y|_{(3)} = \partial_{x_1^1} y \partial_{x_i} x_1 + \sum_{\xi=2}^n \partial_{x_\xi^1} y \partial_{x_i} H_\xi^1(x), \quad i = \overline{1, n},$$

то

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_j(x) y|_{(3)} &= \left(\sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \partial_{x_i} y \right) \Big|_{(3)} = \\ &= \sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \left(\partial_{x_i} x_1 \partial_{x_1^1} y + \sum_{\xi=2}^n \partial_{x_i} H_\xi^1(x) \partial_{x_\xi^1} y \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \partial_{x_i} x_1 \partial_{x_1^1} y + \sum_{\xi=2}^n \sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \partial_{x_i} H_\xi^1(x) \partial_{x_\xi^1} y = \\ &= (\mathfrak{L}_j x_1) \partial_{x_1^1} y + \sum_{\xi=2}^n \mathfrak{L}_j H_\xi^1(x) \partial_{x_\xi^1} y, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Поскольку функции (2) являются первыми интегралами на области \mathcal{X}' дифференциального уравнения (1), то

$$\mathfrak{L}_1 H_\xi^1(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \xi = \overline{2, n}.$$

Первое уравнение (1) якобиевой системы (∂) при замене (3) будет иметь вид

$$\mathfrak{L}_1^1(x^1) y^1 = 0,$$

где оператор

$$\mathfrak{L}_1^1(x^1) = u_{11}^1(x^1) \partial_{x_1^1}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad (4)$$

$x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$, область \mathcal{X}^1 есть образ области \mathcal{X}' при преобразованиях (3), а координата u_{11}^1 такова, что

$$u_{11}^1(x^1)|_{(3)} = u_{11}(x), \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

причём u_{11}^1 не обращается в тождественный нуль на области \mathcal{X}^1 .
Остальные уравнения

$$\mathfrak{L}_\zeta(x)y = 0, \quad \zeta = \overline{2, m},$$

якобиевой системы (∂) при замене (3) будут иметь виды

$$\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1)y^1 = 0, \quad \zeta = \overline{2, m},$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1) = \sum_{i=1}^n u_{\zeta i}^1(x^1) \partial_{x_i^1}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta = \overline{2, m}, \quad (5)$$

имеют такие координаты $u_{\zeta i}^1$, что

$$u_{\zeta 1}^1(x^1)|_{(3)} = \mathfrak{L}_\zeta x_1 = u_{\zeta 1}(x), \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

$$u_{\zeta \xi}^1(x^1)|_{(3)} = \mathfrak{L}_\xi H_\xi^1(x), \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \zeta = \overline{2, m}, \quad \xi = \overline{2, n}.$$

Итак, с помощью замены (3) якобиеву систему (∂) приводим к линейной однородной дифференциальной системе уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_j^1(x^1)y^1 = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

построенной на основании операторов (4) и (5).

Относительно дифференциальной системы (6) оговорим следующие обстоятельства.

Функции (2) образуют базис первых интегралов на области \mathcal{X}' линейного однородного дифференциального уравнения в частных

производных (1). Поэтому преобразование (3) является голоморфизмом на области \mathcal{X}' .

Система (∂) — якобиева, а якобиева система инвариантна при голоморфизме (свойство 2.4.3). Стало быть, и система (6) является якобиевой на области \mathcal{X}^1 .

Кроме этого, голоморфизм (3) устанавливает ещё одно свойство линейных дифференциальных операторов (4) и (5), состоящее в том, что они не являются голоморфно линейно связанными на области \mathcal{X}^1 .

Это обосновано тем, что априори для линейных дифференциальных операторов (1.1.3) принято свойство, по которому они не являются голоморфно линейно связанными на области \mathcal{X}' — прообразе области \mathcal{X}^1 при голоморфизме (3).

В силу якобевости системы (6) для операторов (4) и (5) выполняются тождества

$$\left[\mathfrak{L}_1^1(x^1), \mathfrak{L}_\zeta^1(x^1) \right] = \mathfrak{O}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta = \overline{2, m},$$

или в координатах

$$\begin{aligned} & \left[\mathfrak{L}_1^1(x^1), \mathfrak{L}_\zeta^1(x^1) \right] = \\ & = \left(u_{11}^1(x^1) \partial_{x_1^1} u_{\zeta 1}^1(x^1) - \sum_{i=1}^n u_{\zeta i}^1(x^1) \partial_{x_i^1} u_{11}^1(x^1) \right) \partial_{x_1^1} + \\ & + u_{11}^1(x^1) \sum_{\xi=2}^n \partial_{x_1^1} u_{\zeta \xi}^1(x^1) \partial_{x_\xi^1} = \mathfrak{O}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta = \overline{2, m}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $u_{11}^1(x^1) \not\equiv 0$ на области \mathcal{X}^1 , и приравнивая тождественно нулю функции-координаты при $\partial_{x_\xi^1}$, $\xi = \overline{2, n}$, получаем, что

$$\partial_{x_1^1} u_{\zeta \xi}^1(x^1) = 0, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta = \overline{2, m}, \quad \xi = \overline{2, n}.$$

Следовательно, у линейных дифференциальных операторов (5) координаты $u_{\zeta \xi}^1$, $\zeta = \overline{2, m}$, $\xi = \overline{2, n}$, не зависят от x_1^1 .

Поскольку функция u_{11}^1 тождественно не равна нулю на области \mathcal{X}^1 , то уравнение (4) приводим к виду

$$\partial_{x_1^1} y^1 = 0.$$

Учитывая эти обстоятельства и переобозначив переменные

$$x_\xi^1 = x_{\xi-1}^{*1}, \quad \xi = \overline{2, n}, \quad (7)$$

на основании системы (6) составим новую линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_\zeta^{*1}(x^1) y^1 = 0, \quad \zeta = \overline{2, m}, \quad (8)$$

у которой линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_\zeta^{*1}(x^1) = \sum_{\tau=1}^{n-1} u_{\zeta\tau}^{*1}(x^1) \partial_{x_\tau^1}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta = \overline{2, m}. \quad (9)$$

Область \mathcal{X}^1 является естественной проекцией области \mathcal{X}^1 на координатное пространство $Ox_2^1 \dots x_n^1$ и рассматривается в координатном пространстве $Ox_1^{*1} \dots x_{n-1}^{*1}$, $x^1 = (x_1^{*1}, \dots, x_{n-1}^{*1})$.

Новые координаты $u_{\zeta\tau}^{*1}$ будут такими, что

$$u_{\zeta\tau}^{*1}(x^1)|_{(\tau)} = u_{\zeta, \tau+1}^1(x^1), \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1,$$

$$\mathcal{X}^1 \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad \mathcal{X}^1 \subset \mathbb{R}^n, \quad \zeta = \overline{2, m}, \quad \tau = \overline{1, n-1}.$$

Система (6) якобиева, у операторов (5) координаты

$$u_{\zeta\xi}^1, \quad \zeta = \overline{2, m}, \quad \xi = \overline{2, n},$$

не зависят от x_1^1 . Поэтому скобки Пуассона

$$\left[\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1), \mathfrak{L}_\theta^1(x^1) \right] = \mathfrak{O}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta, \theta = \overline{2, m},$$

или в координатах

$$\begin{aligned} & \left[\mathfrak{L}_\zeta^1(x^1), \mathfrak{L}_\theta^1(x^1) \right] = \\ &= \left[u_{\zeta 1}^1(x^1) \partial_{x_1^1} + \mathfrak{L}_\zeta^*(x^1), u_{\theta 1}^1(x^1) \partial_{x_1^1} + \mathfrak{L}_\theta^*(x^1) \right] = \\ &= \left[u_{\zeta 1}^1(x^1) \partial_{x_1^1}, u_{\theta 1}^1(x^1) \partial_{x_1^1} \right] + \left[u_{\zeta 1}^1(x^1) \partial_{x_1^1}, \mathfrak{L}_\theta^*(x^1) \right] + \\ &+ \left[\mathfrak{L}_\zeta^*(x^1), u_{\theta 1}^1(x^1) \partial_{x_1^1} \right] + \left[\mathfrak{L}_\zeta^*(x^1), \mathfrak{L}_\theta^*(x^1) \right] = \\ &= \left[\mathfrak{L}_\zeta^*(x^1), \mathfrak{L}_\theta^*(x^1) \right] = \mathfrak{O}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta, \theta = \overline{2, m}, \end{aligned}$$

то есть, операторы (9) таковы, что

$$\left[\mathfrak{L}_\zeta^*(x^1), \mathfrak{L}_\theta^*(x^1) \right] = \mathfrak{O}, \quad \forall x^1 \in \mathcal{X}^1, \quad \zeta, \theta = \overline{2, m}.$$

Следовательно, дифференциальная система (8) будет якобиевой на области \mathcal{X}^1 .

Для якобиевой системы (8) осуществляем такую же процедуру, какую проделали относительно исходной системы (∂) .

Продолжая этот процесс далее, получаем уравнение

$$\mathfrak{L}_m^{*m-1}(x^{m-1})y^{m-1} = 0,$$

где $x^{m-1} = (x_m^{*m-1}, \dots, x_n^{*m-1})$, $x^{m-1} \in \mathbb{R}^{n-m+1}$, с базисом первых интегралов

$$H_l^{m-1}: x^{m-1} \rightarrow H_l^{m-1}(x^{m-1}), \quad l = \overline{m+1, n}, \quad (10)$$

на области \mathcal{X}^{m-1} из пространства \mathbb{R}^{n-m+1} .

Учитывая все выполненные замены переменных, на основании функций (10) строим базис первых интегралов исходной яковиевой системы (∂) , который имеет размерность $n - m$.

Пример 1. Построим базис первых интегралов линейной однородной системы уравнений [55, с. 73 – 75]

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1(x)y &\equiv x_1\partial_1y - x_2\partial_2y + x_3\partial_3y - x_4\partial_4y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(x)y &\equiv x_3\partial_1y + x_4\partial_2y - x_1\partial_3y - x_2\partial_4y = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Скобки Пуассона

$$\begin{aligned}[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] &= (x_1\partial_1x_3 - x_2\partial_2x_3 + x_3\partial_3x_3 - x_4\partial_4x_3 - x_3\partial_1x_1 - x_4\partial_2x_1 + \\ &+ x_1\partial_3x_1 + x_2\partial_4x_1)\partial_1 + (x_1\partial_1x_4 - x_2\partial_2x_4 + x_3\partial_3x_4 - x_4\partial_4x_4 - \\ &- x_3\partial_1(-x_2) - x_4\partial_2(-x_2) + x_1\partial_3(-x_2) + x_2\partial_4(-x_2))\partial_2 + \\ &+ (x_1\partial_1(-x_1) - x_2\partial_2(-x_1) + x_3\partial_3(-x_1) - x_4\partial_4(-x_1) - x_3\partial_1x_3 - x_4\partial_2x_3 + \\ &+ x_1\partial_3x_3 + x_2\partial_4x_3)\partial_3 + (x_1\partial_1(-x_2) - x_2\partial_2(-x_2) + x_3\partial_3(-x_2) - \\ &- x_4\partial_4(-x_2) - x_3\partial_1(-x_4) - x_4\partial_2(-x_4) + x_1\partial_3(-x_4) + x_2\partial_4(-x_4))\partial_4 = \\ &= (x_3 - x_3)\partial_1 + (-x_4 + x_4)\partial_2 + (-x_1 + x_1)\partial_3 + (x_2 - x_2)\partial_4 = \mathfrak{O}, \forall x \in \mathbb{R}^4.\end{aligned}$$

Следовательно, система (11) является яковиевой на пространстве \mathbb{R}^4 , а её базис первых интегралов состоит из двух функционально независимых первых интегралов.

Рассмотрим первое уравнение яковиевой системы (11)

$$\mathfrak{L}_1(x)y \equiv x_1\partial_1y - x_2\partial_2y + x_3\partial_3y - x_4\partial_4y = 0.\tag{12}$$

Обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{-x_4}$$

интегрально равносильна уравнению (12).

Из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} = 0$$

находим первый интеграл

$$F_1^1: x \rightarrow x_1x_2, \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

уравнения (12).

Аналогично из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_4}{x_4} = 0$$

находим ещё два первых интеграла

$$F_2^1: x \rightarrow x_2x_3 \quad \text{и} \quad F_3^1: x \rightarrow x_1x_4$$

на пространстве \mathbb{R}^4 уравнения (12).

Эти три первых интеграла, будучи функционально независимыми на \mathbb{R}^4 , образуют интегральный базис на пространстве \mathbb{R}^4 линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (12).

Введём новые переменные

$$x_1 = x_1, \quad u_2 = x_1x_2, \quad u_3 = x_2x_3, \quad u_4 = x_1x_4 \quad (13)$$

и на пространстве \mathbb{R}^4 вычислим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1x_1 &= x_1; \quad \mathfrak{L}_1(x_1x_2) = \mathfrak{L}_1(x_2x_3) = \mathfrak{L}_1(x_1x_4) = 0; \quad \mathfrak{L}_2x_1 = x_3; \\ \mathfrak{L}_2(x_1x_2) &= x_3\partial_1(x_1x_2) + x_4\partial_2(x_1x_2) - x_1\partial_3(x_1x_2) - x_2\partial_4(x_1x_2) = \\ &= x_2x_3 + x_1x_4; \\ \mathfrak{L}_2(x_2x_3) &= x_3\partial_1(x_2x_3) + x_4\partial_2(x_2x_3) - x_1\partial_3(x_2x_3) - x_2\partial_4(x_2x_3) = \\ &= x_3x_4 - x_1x_2; \\ \mathfrak{L}_2(x_1x_4) &= x_3\partial_1(x_1x_4) + x_4\partial_2(x_1x_4) - x_1\partial_3(x_1x_4) - x_2\partial_4(x_1x_4) = \\ &= x_3x_4 - x_1x_2. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$x_2x_3 + x_1x_4 = u_3 + u_4, \quad x_3x_4 - x_1x_2 = \frac{u_3u_4}{u_2} - u_2,$$

составляем линейное однородное уравнение в частных производных

$$(u_3 + u_4)\partial_{u_2}z + \frac{u_3u_4 - u_2^2}{u_2}(\partial_{u_3}z + \partial_{u_4}z) = 0 \quad (14)$$

и ассоциированную к нему обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{du_2}{u_2(u_3 + u_4)} = \frac{du_3}{u_3u_4 - u_2^2} = \frac{du_4}{u_3u_4 - u_2^2}.$$

Из дифференциального уравнения

$$du_3 = du_4$$

находим первый интеграл уравнения (14)

$$F_1^2: (u_2, u_3, u_4) \rightarrow u_3 - u_4, \quad \forall (u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{U}, \quad (15)$$

на любой области \mathcal{U} из множества $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(u_2, u_3, u_4): u_2 = 0\}$.

По свойству пропорции, на основании обыкновенной дифференциальной системы составляем уравнение

$$\frac{du_2}{u_2(u_3 + u_4)} = \frac{u_2 du_2 + u_4 du_3 + u_3 du_4}{u_3u_4(u_3 + u_4)},$$

которое преобразовываем к виду

$$u_2(u_4 du_3 + u_3 du_4) - u_3u_4 du_2 + u_2^2 du_2 = 0,$$

а затем — к виду

$$u_2 d(u_3u_4) - u_3u_4 du_2 + u_2^2 du_2 = 0,$$

и получаем, что дифференциал

$$d\left(\frac{u_3u_4}{u_2} + u_2\right) = 0.$$

Стало быть, функция

$$F_2^2: (u_2, u_3, u_4) \rightarrow u_2 + \frac{u_3u_4}{u_2}, \quad \forall (u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{U}, \quad (16)$$

является первым интегралом на всякой области \mathcal{U} , содержащейся в множестве \mathcal{V} из пространства \mathbb{R}^3 , дифференциального уравнения (14).

Первые интегралы (15) и (16), будучи функционально независимыми на области \mathcal{U} , составляют базис первых интегралов на этой области линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (14).

Учитывая замену переменных (13), на основании функций (15) и (16) получаем функции

$$F_1: x \rightarrow x_1x_4 - x_2x_3, \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad \text{и} \quad F_2: x \rightarrow x_1x_2 + x_3x_4, \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

которые образуют базис первых интегралов на пространстве \mathbb{R}^4 якобиевой системы (11).

Пример 2. Построим базис первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(x)y &\equiv (x_1 - x_1(x_1+1))\partial_1y + (-x_2(x_1+1))\partial_2y + (-x_3(x_1+1))\partial_3y = 0, \\ \mathfrak{J}_2(x)y &\equiv (-x_1 - x_1(x_1-1))\partial_1y + \\ &+ (x_2 - x_2(x_1-1))\partial_2y + (x_2 - x_3(x_1-1))\partial_3y = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Система (17) якобиева, так как

$$[\mathfrak{J}_1(x), \mathfrak{J}_2(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

а её базис первых интегралов состоит из одного первого интеграла.

У первого уравнения системы (17) находим базис первых интегралов на области $\mathcal{X}' \subset \{x: x_1x_3 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^3 :

$$F_1^1: x \rightarrow \frac{x_2}{x_1} \exp \frac{1}{x_1}, \quad F_2^1: x \rightarrow \frac{x_2}{x_3}, \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

Введём новые переменные

$$x_1 = x_1, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_1} \exp \frac{1}{x_1}, \quad u_3 = \frac{x_2}{x_3} \quad (18)$$

и на области \mathcal{X}' вычислим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1x_1 &= -x_1^2; \quad \mathfrak{J}_1\left(\frac{x_2}{x_1} \exp \frac{1}{x_1}\right) = \mathfrak{J}_1 \frac{x_2}{x_3} = 0; \quad \mathfrak{J}_2x_1 = -x_1^2; \\ \mathfrak{J}_2\left(\frac{x_2}{x_1} \exp \frac{1}{x_1}\right) &= 3 \cdot \frac{x_2}{x_1} \exp \frac{1}{x_1}; \quad \mathfrak{J}_2 \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2}{x_3} - \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$3 \cdot \frac{x_2}{x_1} \exp \frac{1}{x_1} = 3u_2, \quad \frac{x_2}{x_3} - \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 = u_3 - u_3^2,$$

составляем линейное однородное уравнение в частных производных

$$3u_2 \partial_{u_2} z + (u_3 - u_3^2) \partial_{u_3} z = 0. \quad (19)$$

Функция

$$F_1^2: (u_2, u_3) \rightarrow \frac{u_2(u_3 - 1)^3}{u_3^3}, \quad \forall (u_2, u_3) \in \mathcal{U}, \quad (20)$$

образует базис первых интегралов уравнения в частных производных (19) на любой области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(u_2, u_3): u_3 \neq 0\}$.

Учитывая замену переменных (18), на основании функции (20) получаем функцию

$$F: x \rightarrow \frac{(x_2 - x_3)^3}{x_1 x_2^2} \exp \frac{1}{x_1}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

которая образует базис первых интегралов на любой области \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 x_2 \neq 0\}$ якобиевой системы (17).

2. Интегрирование полной линейной однородной системы уравнений в частных производных

Известно (теорема 2.4.3), что полная система (∂) линейной невырожденной на области \mathcal{X} заменой операторов (1.1.3) приводится к якобиевой системе. Поэтому метод Якоби может быть распространён и на полные системы (∂) .

Для этого дифференциальную систему (∂) надо привести к нормальному виду $(N\partial)$.

Полученная система $(N\partial)$ будет якобиевой (по теореме 1.4.3, ввиду полноты системы (∂)), и для неё применим метод Якоби.

Построенный методом Якоби базис первых интегралов на области \mathcal{X}' , $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, системы $(N\partial)$ также будет базисом первых интегралов системы (∂) на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} .

Пример 1. Построим базис первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных [55, с. 75 – 76]

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1(x)y &\equiv \partial_1 y + \partial_2 y + \partial_3 y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(x)y &\equiv x_1 \partial_1 y + x_2 \partial_2 y + x_3 \partial_3 y = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Скобки Пуассона

$$\begin{aligned}[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] &= (\partial_1 x_1 + \partial_2 x_1 + \partial_3 x_1 - x_1 \partial_1 1 - x_2 \partial_2 1 - x_3 \partial_3 1) \partial_1 + \\ &+ (\partial_1 x_2 + \partial_2 x_2 + \partial_3 x_2 - x_1 \partial_1 1 - x_2 \partial_2 1 - x_3 \partial_3 1) \partial_2 + (\partial_1 x_3 + \partial_2 x_3 + \\ &+ \partial_3 x_3 - x_1 \partial_1 1 - x_2 \partial_2 1 - x_3 \partial_3 1) \partial_3 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = \mathfrak{L}_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Следовательно, система (1) полная, но не якобиева на \mathbb{R}^3 .

Разрешая систему равенств (1) относительно $\partial_1 y$ и $\partial_2 y$, систему (1) приводим к нормальному виду

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_1(x)y &\equiv \partial_1 y - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \partial_3 y = 0, \\ \mathfrak{M}_2(x)y &\equiv \partial_2 y - \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_1} \partial_3 y = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

При этом система (2) будет якобиевой на всякой области \mathcal{X}' из множества $\{x: x_2 - x_1 \neq 0\}$ и интегрально равносильной системе (1) на соответствующей области.

Рассмотрим первое уравнение системы (2)

$$\mathfrak{M}_1(x)y \equiv \partial_1 y - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \partial_3 y = 0.\tag{3}$$

Ассоциированная обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_1} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{-(x_3 - x_2)}$$

имеет первый интеграл

$$F_1^1: x \rightarrow x_2, \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_1} = \frac{dx_3}{x_2 - x_3},$$

в котором x_2 выступает в роли постоянной, будучи уравнением с разделёнными переменными, имеет первый интеграл

$$\Phi: (x_1, x_3) \rightarrow \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}, \quad \forall (x_1, x_3) \in \mathcal{X}^*,$$

на всякой области \mathcal{X}^* из множества $\{(x_1, x_3): x_1 \neq x_2\}$.
Следовательно, функции

$$F_1^1: x \rightarrow x_2, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \text{и} \quad F_2^1: x \rightarrow \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}, \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

образуют базис первых интегралов на области \mathcal{X}' линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (3).

Поскольку на области \mathcal{X}'

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2 \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} &= \partial_2 \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} - \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_1} \partial_3 \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)^2} = 0, \end{aligned}$$

то функция F_2^1 является первым интегралом на области \mathcal{X}' второго уравнения системы (2), а значит, и системы (2).

Эта функция составляет базис первых интегралов на области \mathcal{X}' якобиевой системы (2) и, следовательно, интегрально равносильной ей полной системы (1).

3. Построение базиса первых интегралов вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

На основании интегральной равносильности вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (CD) и ассоциированной якобиевой нормальной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных (N ∂) (предложения 1.5.3 и 2.5.3) метод Якоби, разработанный в пункте 1 для якобиевых систем (∂), может быть использован для построения базиса первых интегралов вполне разрешимой системы (CD).

С этой целью на основании системы (CD) строим ассоциированную нормальную линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{X}_j(t, x)y = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

При этом система (1) будет якобиевой на области \mathcal{D} ввиду того, что система (CD) на области \mathcal{D} вполне разрешима (предложения 2.2.3 и 2.5.3).

Затем методом Якоби (пункт 1) строим базис первых интегралов на подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} системы (1), который будет базисом первых интегралов (предложение 1.5.3) данной вполне разрешимой системы (CD).

Пример 1. Построим базис первых интегралов уравнения в полных дифференциалах

$$dx = t_1 t_3 dt_1 + t_2 t_3 dt_2 + 0,5(t_1^2 + t_2^2) dt_3. \quad (2)$$

Ассоциированной к уравнению в полных дифференциалах (2) является нормальная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1(t, x)y &\equiv \partial_{t_1} y + t_1 t_3 \partial_x y = 0, \\ \mathfrak{X}_2(t, x)y &\equiv \partial_{t_2} y + t_2 t_3 \partial_x y = 0, \\ \mathfrak{X}_3(t, x)y &\equiv \partial_{t_3} y + 0,5(t_1^2 + t_2^2) \partial_x y = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Скобки Пуассона на пространстве \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} [\mathfrak{X}_1(t, x), \mathfrak{X}_2(t, x)] &= (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_2 1) \partial_{t_1} + (\mathfrak{X}_1 1 - \mathfrak{X}_2 0) \partial_{t_2} + (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_2 0) \partial_{t_3} + \\ &+ (\partial_{t_1}(t_2 t_3) + t_1 t_3 \partial_x(t_2 t_3) - \partial_{t_2}(t_1 t_3) - t_2 t_3 \partial_x(t_1 t_3)) \partial_x = \mathfrak{D}; \\ [\mathfrak{X}_1(t, x), \mathfrak{X}_3(t, x)] &= (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_3 1) \partial_{t_1} + (\mathfrak{X}_1 0 - \mathfrak{X}_3 0) \partial_{t_2} + (\mathfrak{X}_1 1 - \mathfrak{X}_3 0) \partial_{t_3} + \\ &+ \left(\partial_{t_1} \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + t_1 t_3 \partial_x \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} - \partial_{t_3}(t_1 t_3) - \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \partial_x(t_1 t_3) \right) \partial_x = \\ &= (t_1 - t_1) \partial_x = \mathfrak{D}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{X}_2(t, x), \mathfrak{X}_3(t, x)] &= (\mathfrak{X}_2 0 - \mathfrak{X}_3 0) \partial_{t_1} + (\mathfrak{X}_2 0 - \mathfrak{X}_3 1) \partial_{t_2} + (\mathfrak{X}_2 1 - \mathfrak{X}_3 0) \partial_{t_3} + \\
&+ \left(\partial_{t_2} \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + t_2 t_3 \partial_x \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} - \partial_{t_3} (t_2 t_3) - \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \partial_x (t_2 t_3) \right) \partial_x = \\
&= (t_2 - t_2) \partial_x = \mathfrak{O}.
\end{aligned}$$

Стало быть, система (3) является якобиевой на пространстве \mathbb{R}^4 , а уравнение (2) является вполне разрешимым на этом пространстве.

Поэтому базис первых интегралов нормальной якобиевой системы (3) (общий интеграл вполне разрешимого уравнения (2)) состоит из одного первого интеграла.

Рассмотрим первое уравнение нормальной якобиевой системы (3)

$$\mathfrak{X}_1(t, x)y \equiv \partial_{t_1} y + t_1 t_3 \partial_x y = 0. \quad (4)$$

Обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dt_1}{1} = \frac{dt_2}{0} = \frac{dt_3}{0} = \frac{dx}{t_1 t_3}$$

интегрально равносильна уравнению (4).

Функции

$$F_1^1: (t, x) \rightarrow t_2, \quad F_2^1: (t, x) \rightarrow t_3, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

являются первыми интегралами дифференциального уравнения (4).

Из уравнения в дифференциалах

$$dx - t_1 t_3 dt_1 = 0,$$

считая t_3 постоянной, находим ещё один первый интеграл

$$F_3^1: (t, x) \rightarrow x - \frac{t_1^2 t_3}{2}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

дифференциального уравнения в частных производных (4).

Этот первый интеграл в совокупности с двумя ранее полученными первыми интегралами, будучи функционально независимыми на \mathbb{R}^4 , образуют интегральный базис на \mathbb{R}^4 дифференциального уравнения (4).

Введём новые переменные

$$t_1 = t_1, \quad t_2 = t_2, \quad t_3 = t_3, \quad u_4 = x - \frac{t_1^2 t_3}{2}. \quad (5)$$

Поскольку

$$\mathfrak{X}_1 t_1 = 1, \quad \mathfrak{X}_1 t_2 = \mathfrak{X}_1 t_3 = \mathfrak{X}_1 \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

то на основании уравнения (4) получим, что

$$\partial_{t_1} z = 0.$$

Учитывая тождества

$$\mathfrak{X}_2 t_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_2 t_2 = 1, \quad \mathfrak{X}_2 t_3 = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

$$\mathfrak{X}_2 \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) = \partial_{t_2} \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) + t_2 t_3 \partial_x \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) = t_2 t_3, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

на основании второго уравнения системы (3) получаем уравнение

$$\partial_{t_2} z + t_2 t_3 \partial_{u_4} z = 0. \quad (6)$$

На основании третьего уравнения системы (3), учитывая, что на \mathbb{R}^4

$$\mathfrak{X}_3 t_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_3 t_2 = 0, \quad \mathfrak{X}_3 t_3 = 1,$$

$$\mathfrak{X}_3 \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) = \partial_{t_3} \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) + 0,5(t_1^2 + t_2^2) \partial_x \left(x - \frac{t_1^2 t_3}{2} \right) = \frac{t_2^2}{2},$$

получаем уравнение

$$\partial_{t_3} z + \frac{t_2^2}{2} \partial_{u_4} z = 0.$$

Рассмотрим нормальную якобиеву линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{M}_1(t_2, t_3, u_4)z \equiv \partial_{t_2} z + t_2 t_3 \partial_{u_4} z = 0, \quad (7)$$

$$\mathfrak{M}_2(t_2, t_3, u_4)z \equiv \partial_{t_3} z + 0,5t_2^2 \partial_{u_4} z = 0.$$

Ассоциированной к линейному однородному уравнению в частных производных (6) (первому уравнению системы (7)) является обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dt_2}{1} = \frac{dt_3}{0} = \frac{du_4}{t_2 t_3}.$$

Функция

$$F_1^2: (t_2, t_3, u_4) \rightarrow t_3, \forall (t_2, t_3, u_4) \in \mathbb{R}^3,$$

является первым интегралом на пространстве \mathbb{R}^3 уравнения (6).

Из уравнения

$$t_2 t_3 dt_2 - du_4 = 0,$$

считая t_3 постоянной, находим ещё один первый интеграл уравнения (6)

$$F_2^2: (t_2, t_3, u_4) \rightarrow u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}, \forall (t_2, t_3, u_4) \in \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

который в совокупности с ранее полученным первым интегралом, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов на \mathbb{R}^3 дифференциального уравнения (6).

Поскольку

$$\mathfrak{M}_2\left(u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\right) = \partial_{t_3}\left(u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\right) + 0,5 t_2^2 \partial_{u_4}\left(u_4 - \frac{t_2^2 t_3}{2}\right) \equiv 0$$

на \mathbb{R}^3 , то функция (8) является первым интегралом на \mathbb{R}^3 второго уравнения системы (7), а значит, и системы (7).

Система (7) якобиева, и её базис первых интегралов состоит из одного первого интеграла. Поэтому функция (8) образует базис первых интегралов нормальной якобиевой системы (7) на пространстве \mathbb{R}^3 .

Учитывая замену (5), на основании функции (8) получаем функцию

$$F: (t, x) \rightarrow x - \frac{(t_1^2 + t_2^2)t_3}{2}, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

которая образует интегральный базис нормальной якобиевой системы (3), а значит, и общий интеграл вполне разрешимого уравнения (2).

Разрешая равенство

$$x - \frac{(t_1^2 + t_2^2)t_3}{2} = C$$

относительно x , находим решения

$$x: t \rightarrow \frac{(t_1^2 + t_2^2)t_3}{2} + C, \forall t \in \mathbb{R}^3,$$

уравнения в полных дифференциалах (2).

§ 6. Первые интегралы системы уравнений Пфаффа

Рассмотрим систему уравнений Пфаффа

$$\omega_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\text{Pf})$$

где линейные дифференциальные формы

$$\omega_j(x) = \sum_{i=1}^n w_{ji}(x) dx_i, \quad \forall x \in V, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Для поля вещественных чисел \mathbb{R} и поля комплексных чисел \mathbb{C} введём общий символ \mathbb{K} .

Исследование системы (Pf) будем проводить, когда у 1-форм (1) коэффициенты $w_{ji}: V \rightarrow \mathbb{K}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$, являются голоморфными функциями на области V арифметического пространства \mathbb{K}^n .

1. Интегрально равносильные системы Пфаффа

Первый интеграл системы уравнений Пфаффа. Приведение системы уравнений Пфаффа, заданной с помощью линейно связанных 1-форм, к равносильной системе Пфаффа, заданной с помощью 1-форм, не являющихся линейно связанными.

Определение 1. Функцию

$$F: x \rightarrow F(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

голоморфную на подобласти Ω области V , назовём **первым интегралом на области Ω системы Пфаффа (Pf)**, если существуют голоморфные на области Ω функции $a_j: \Omega \rightarrow \mathbb{K}, j = \overline{1, m}$, такие, что полный дифференциал

$$dF(x) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \omega_j(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2)$$

На множестве систем уравнений Пфаффа введём отношение эквивалентности: две системы Пфаффа будем считать интегрально равносильными на некоторой области, если на этой области каждый первый интеграл первой системы является первым интегралом второй системы и, наоборот, каждый первый интеграл второй системы является первым интегралом первой системы.

Далее систему уравнений Пфаффа (Pf) будем рассматривать, когда 1-формы (1.0) не являются голоморфно линейно связанными на области V [31, с. 105 – 108, 116; 98, с. 113 – 114].

Это требование в общем не сужает множество всех возможных систем уравнений Пфаффа (Pf).

Действительно, пусть 1-формы (1.0) голоморфно линейно связаны на области V . Тогда у функциональной матрицы

$$w(x) = \|w_{ji}(x)\|_{m \times n}, \quad \forall x \in V, \quad (3)$$

на области V ранг

$$\text{rank } w(x) = s(x), \quad 1 \leq s(x) < \min \{m, n\}, \quad \forall x \in V.$$

Выделим $s = \min_V s(x)$ линейных дифференциальных форм

$$\omega_{j_l}, \quad j_l \in \{1, \dots, m\}, \quad l = \overline{1, s}, \quad (4)$$

которые не будут голоморфно линейно связанными на такой подобласти Ω области V , что дополнение области Ω до области V имеет нулевую меру: $\mu C_V \Omega = 0$.

На основании 1-форм (4) построим новую систему Пфаффа

$$\omega_{j_l}(x) = 0, \quad j_l \in \{1, \dots, m\}, \quad l = \overline{1, s}. \quad (5)$$

Так как 1-формы (4) не являются голоморфно линейно связанными, а $s = \min_V s(x)$, то согласно определению 1 у систем уравнений Пфаффа (Pf) и (5) на области Ω одни и те же первые интегралы.

Стало быть, системы уравнений Пфаффа (Pf) и (5) интегрально равносильны на области Ω . А поскольку мера $C_V \Omega$ нулевая, то класс систем (Pf) не сужен.

2. Интегральный базис

Вырожденный случай системы уравнений Пфаффа. Первые интегралы вырожденной системы уравнений Пфаффа. Функциональная неоднозначность первого интеграла. Базис первых интегралов и его размерность. Базис первых интегралов вырожденной системы уравнений Пфаффа.

Пусть 1-формы (1.0) не являются голоморфно линейно связанными на области V . Тогда матрица (3.1) почти везде на области V имеет ранг $\text{rank } w(x) = m$. И по необходимости $m \leq n$.

Если $m = n$, то не являющиеся голоморфно линейно связанными на области V линейные дифференциальные формы (1.0) определяют невырожденность почти везде на области V квадратной матрицы (3.1) порядка n .

В этом случае на области $\Omega \subset V$ такой, что $\mu_{C_V}\Omega = 0$, систему (Pf) с помощью невырожденного алгебраического преобразования приводим к дифференциальной системе

$$dx_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда получаем, что

$$x_i = C_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $C_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные из поля \mathbb{K} , а значит, функции

$$F_i: x \rightarrow x_i, \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

являются первыми интегралами на области Ω системы (Pf).

Таким образом, корректно систему уравнений Пфаффа (Pf) рассматривать, когда $m < n$, а случай $m = n$ отнести к вырожденному и по его поводу оговорить следующее.

Предложение 1. Система (Pf) при $m = n$ имеет n функционально независимых первых интегралов (1) на такой подобласти Ω области V , что $\mu_{C_V}\Omega = 0$.

Теорема 1. Если голоморфные функции

$$F_\xi: x \rightarrow F_\xi(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \Omega \subset V, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad (2)$$

являются первыми интегралами на области Ω системы (Pf), то функция

$$\tilde{F}: x \rightarrow \Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)), \quad \forall x \in \Omega, \quad (3)$$

где Φ — произвольная голоморфная на $\times_{\xi=1}^k EF_k$ функция, также будет первым интегралом на Ω системы (Pf).

Доказательство. В соответствии с определением 1.1 функции (2) являются первыми интегралами на области Ω системы (Pf) тогда и только тогда, когда существуют такие голоморфные функции

$$a_{\xi j}: \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m},$$

что у функций (2) полные дифференциалы

$$dF_{\xi}(x) = \sum_{j=1}^m a_{\xi j}(x) \omega_j(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi = \overline{1, k}. \quad (4)$$

Пусть Φ — произвольная скалярная функция, голоморфная на множестве $\times_{\xi=1}^k EF_{\xi}$, где EF_{ξ} , $\xi = \overline{1, k}$, есть множества значений функций (2).

Учитывая систему тождеств (4), найдём полный дифференциал функции (3):

$$\begin{aligned} d\tilde{F}(x) &= d\Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)) = \\ &= \sum_{\xi=1}^k \partial_{\xi} \Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)) dF_{\xi}(x) = \\ &= \sum_{\xi=1}^k \sum_{j=1}^m \partial_{\xi} \Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)) a_{\xi j}(x) \omega_j(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Это тождество в соответствии с определением 1.1 означает, что функция (3) является первым интегралом на области Ω системы уравнений Пфаффа (Pf). ■

Теорема 1 выражает функциональную неоднозначность первого интеграла системы уравнений Пфаффа и устанавливает приоритет функционально независимых первых интегралов.

Аналогичное свойство функциональной неоднозначности первых интегралов имеет место для обыкновенных дифференциальных систем [89, с. 262 – 263], систем уравнений в полных дифференциалах (теорема 1.2.2), линейных однородных уравнений в частных производных [55, с. 16] и систем линейных однородных уравнений в частных производных (теорема 1.1.3).

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений Пфаффа

$$\omega_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \omega_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= x_1(1 + x_2) dx_1 + x_2(1 - x_2) dx_2 + \\ &+ (x_3 + x_2x_4) dx_3 + (x_4 + x_2x_3) dx_4, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4, \\ \omega_2(x) &= x_1 dx_1 - x_2 dx_2 + x_4 dx_3 + x_3 dx_4, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4. \end{aligned}$$

Так как

$$2\omega_1(x) + 2(1 - x_2)\omega_2(x) = d(2x_1^2 + (x_3 + x_4)^2), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

и

$$2\omega_1(x) - 2(1 + x_2)\omega_2(x) = d(2x_2^2 + (x_3 - x_4)^2), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

то, по определению 1.1, функции

$$F_1: x \rightarrow 2x_1^2 + (x_3 + x_4)^2, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

и

$$F_2: x \rightarrow 2x_2^2 + (x_3 - x_4)^2, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

являются первыми интегралами на пространстве \mathbb{K}^4 системы (5).

Матрица Якоби

$$J(F_1, F_2; x) = \left\| \begin{array}{cccc} 4x_1 & 0 & 2(x_3 + x_4) & 2(x_3 + x_4) \\ 0 & 4x_2 & 2(x_3 - x_4) & -2(x_3 - x_4) \end{array} \right\|$$

на \mathbb{K}^4 имеет $\text{rank } J(F_1, F_2; x) = 2$.

Следовательно, первые интегралы F_1 и F_2 являются функционально независимыми на пространстве \mathbb{K}^4 .

Согласно теореме 1 первым интегралом на \mathbb{K}^4 системы (5) будет, например, и функция

$$F_3: x \rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4, \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

так как

$$F_3(x) = \frac{1}{2} (F_1(x) - F_2(x)), \forall x \in \mathbb{K}^4.$$

Определение 1. Совокупность функционально независимых на области Ω первых интегралов (2) системы (Pf) назовём **базисом первых интегралов** на области Ω , если для любого первого интеграла $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ системы (Pf) существует представление

$$\Psi(x) = \Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)), \forall x \in \Omega,$$

где Φ — некоторая скалярная функция, голоморфная на множестве $\times_{\xi=1}^k \text{EF}_\xi$. Число k при этом назовём **размерностью интегрального базиса**.

В соответствии с определением 1 из предложения 1 следует

Предложение 2. Функции (1) образуют базис первых интегралов на области Ω системы (Pf) при $t = n$.

Пример 2. У системы уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv dx_1 + dx_2 + 2 dx_3 = 0, \\ \omega_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv dx_1 + 2 dx_2 + 2 dx_3 = 0, \\ \omega_3(x_1, x_2, x_3) &\equiv dx_1 + dx_2 + (2 + x_2) dx_3 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

матрица (3.1) на множестве $\Xi = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \neq 0\}$ из \mathbb{K}^3 является невырожденной, ибо её определитель $\det w(x_1, x_2, x_3) = x_2$ не обращается в нуль на этом множестве.

Согласно предложению 2 сужения функций

$$F_\xi : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_\xi, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3, \quad \xi = \overline{1, 3},$$

образуют базис первых интегралов на любой области из множества Ξ системы (6).

При $x_2 = 0$ система уравнений Пфаффа (6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$dx_1 + 2dx_3 = 0$$

с общим интегралом

$$F : (x_1, x_3) \rightarrow x_1 + 2x_3, \quad \forall (x_1, x_3) \in \mathbb{K}^2.$$

3. Критерий существования первого интеграла

Линейные дифференциальные операторы, контрагредидентные к 1-формам системы уравнений Пфаффа. Критерий существования первого интеграла.

Линейные дифференциальные формы (1.0), индуцированные системой уравнений Пфаффа (Pf), дополним $n - m$ линейными дифференциальными формами

$$\omega_\zeta(x) = \sum_{i=1}^n w_{\zeta i}(x) dx_i, \quad \forall x \in V, \quad \zeta = \overline{m+1, n}, \quad (1)$$

с голоморфными коэффициентами

$$w_{\zeta i} : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad \zeta = \overline{m+1, n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Линейные дифференциальные формы (1) выберем так, чтобы они с 1-формами (1.0) в совокупности

$$\omega_\xi(x) = \sum_{i=1}^n w_{\xi i}(x) dx_i, \quad \forall x \in V, \quad \xi = \overline{1, n}, \quad (2)$$

не были голоморфно линейно связанными на области V .

Построим квадратную матрицу n -го порядка

$$\tilde{w}(x) = \|w_{\xi i}(x)\|, \quad \forall x \in V. \quad (3)$$

Так как 1-формы (2) не являются голоморфно линейно связанными на области V , то матрица \tilde{w} невырождена на такой области $\tilde{\Omega}$, что $\tilde{\Omega} \subset V$, а $\mu_{CV}\tilde{\Omega} = 0$.

В этом случае на области $\tilde{\Omega}$ для матрицы (3) существует обратная матрица

$$g(x) = \|g_{i\xi}(x)\|, \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad (4)$$

которая будет невырожденной на области $\tilde{\Omega}$ квадратной матрицей порядка n .

При этом

$$\tilde{w}(x)g(x) = E, \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad (5)$$

где E — единичная матрица.

Построим n линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{G}_i(x) = \sum_{\xi=1}^n g_{\xi i}(x) \partial_{\xi}, \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

которые не являются голоморфно линейно связанными на области $\tilde{\Omega}$, так как матрица (4) является невырожденной на этой области.

Согласно координатной связи, выраженной тождеством (5), дифференциальные операторы (6) и 1-формы (2) назовём *контрагredientными*.

Тогда полный дифференциал любой голоморфной функции $F: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$, учитывая тождество (5), можно представить с помощью операторов (6) и 1-форм (2) в виде

$$dF(x) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{G}_i F(x) \omega_i(x), \quad \forall x \in \tilde{\Omega}. \quad (7)$$

На основании представления (7) и определения 1.1 получаем следующий критерий существования первого интеграла у системы уравнений Пфаффа.

Теорема 1. *Голоморфная функция $F: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$ является первым интегралом на подобласти $\tilde{\Omega}$ области V системы уравнений Пфаффа (Pf) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств*

$$\mathfrak{G}_{\zeta} F(x) = 0, \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \zeta = \overline{m+1, n}. \quad (8)$$

4. Интегральная равносильность с линейной однородной системой в частных производных

Линейная однородная система уравнений в частных производных, контрагредиентная к системе уравнений Пфаффа. Построение базиса первых интегралов системы уравнений Пфаффа по интегральному базису контрагредиентной линейной однородной системы уравнений в частных производных.

Критерий существования первого интеграла системы (Pf), приведённый в теореме 1.3, позволяет строить базис первых интегралов системы уравнений Пфаффа с помощью системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка.

Теорема 1. *Голоморфные функции*

$$F_{\xi}: x \rightarrow F_{\xi}(x), \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad (1)$$

образуют базис первых интегралов на подобласти $\tilde{\Omega}$ области V системы уравнений Пфаффа (Pf), если и только если функции (1) образуют базис первых интегралов на области $\tilde{\Omega}$ системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathfrak{G}_{\zeta}(x)y = 0, \quad \zeta = \overline{m+1, n}, \quad (2)$$

индуцированной операторами (6.3).

Действительно, система тождеств (8.1) означает (определение 1.1.3), что функция $F: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$ является первым интегралом на $\tilde{\Omega}$ линейной однородной системы в частных производных (2).

Тогда, используя определения интегральных базисов системы Пфаффа (определение 1.2) и линейной однородной системы в частных производных (определение 2.1.3), из теоремы 1.3 получаем критерий, сформулированный в теореме 1. ■

Системы (Pf) и (2) будем называть *контрагredientными*.

По теореме 1, линейная однородная система уравнений в частных производных (2) является интегрально равносильной на области $\tilde{\Omega}$ с контрагredientной системой уравнений Пфаффа (Pf).

Дополнение 1-форм (1.0) до 1-форм (2.3) производится с одним лишь требованием к голоморфным на области V линейным дифференциальным формам (1.3), состоящим в том, чтобы 1-формы (2.3) не были голоморфно линейно связанными на области V .

С этой точки зрения, по системе уравнений Пфаффа (Pf) контрагredientная линейная однородная система уравнений в частных производных (2) строится неоднозначно.

Вместе с тем это не влияет, с точностью до функционального выражения базисных интегралов, на интегральный базис системы уравнений Пфаффа (Pf) и регулируется теоремой 1.2.

Что касается области $\tilde{\Omega}$, на которой контрагredientные системы (Pf) и (2) интегрально равносильны, то она устанавливается по области V , на которой задана система уравнений Пфаффа (Pf), и корректируется возможностью построения матрицы (4.3), обратной к матрице (3.3).

Пример 1. С целью построения базиса первых интегралов системы уравнений Пфаффа

$$\omega_1(x) = 0, \quad \omega_2(x) = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= dx_1 - dx_2 - \frac{x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_3x_4}{x_2(x_3 - x_4)} dx_3 + \\ &+ \frac{x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2}{x_2(x_3 - x_4)} dx_4, \quad \forall x \in \Xi, \\ \omega_2(x) &= dx_1 + dx_2 - \frac{x_1x_2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_3x_4}{x_2(x_3 - x_4)} dx_3 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{x_1 x_2 - x_2^2 + 2x_3 x_4 + 2x_4^2}{x_2(x_3 - x_4)} dx_4, \forall x \in \Xi,$$

множество $\Xi = \{x: x_2(x_3 - x_4) \neq 0\}$, линейные дифференциальные формы ω_1 и ω_2 дополним двумя 1-формами

$$\omega_3(x) = \frac{x_3}{x_2(x_3 - x_4)} dx_3 - \frac{x_4}{x_2(x_3 - x_4)} dx_4, \forall x \in \Xi,$$

и

$$\omega_4(x) = -\frac{1}{x_3 - x_4} dx_3 + \frac{1}{x_3 - x_4} dx_4, \forall x \in \Xi.$$

Квадратная матрица (3.3) четвёртого порядка, сооставленная из координат линейных дифференциальных форм $\omega_i, i = \overline{1, 4}$, является невырожденной на множестве Ξ , так как её определитель

$$\det \tilde{w}(x) = \frac{2}{x_2(x_3 - x_4)} \neq 0, \forall x \in \Xi.$$

Поэтому на области $\tilde{\Omega}$, взятой произвольным образом из множества Ξ , линейные дифференциальные формы $\omega_i, i = \overline{1, 4}$, не являются голоморфно линейно связанными.

На основании матрицы (4.3), обратной к матрице (3.3), составляем контрагredientные к 1-формам $\omega_i, i = \overline{1, 4}$, линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{G}_1(x) = \frac{1}{2} (\partial_1 - \partial_2), \quad \mathfrak{G}_2(x) = \frac{1}{2} (\partial_1 + \partial_2), \quad \forall x \in \tilde{\Omega},$$

$$\mathfrak{G}_3(x) = 2(x_3 + x_4)\partial_2 + x_2\partial_3 + x_2\partial_4, \quad \forall x \in \tilde{\Omega},$$

$$\mathfrak{G}_4(x) = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4\partial_3 + x_3\partial_4, \quad \forall x \in \tilde{\Omega},$$

и строим контрагredientную к системе уравнений Пфаффа (3) линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} 2(x_3 + x_4)\partial_2 u + x_2\partial_3 u + x_2\partial_4 u &= 0, \\ -x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u + x_4\partial_3 u + x_3\partial_4 u &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Сужения функций

$$F_1: x \rightarrow \frac{x_1}{x_3 - x_4}, \quad \forall x \in \{x: x_4 \neq x_3\}, \quad (5)$$

$$F_2: x \rightarrow x_1^2(x_2^2 - (x_3 + x_4)^2), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

образуют [75, с. 200; 43] базис первых интегралов на области $\tilde{\Omega}$ линейной однородной системы уравнений в частных производных (4).

В соответствии с теоремой 1 сужения функций (5) будут базисом первых интегралов на области $\tilde{\Omega}$ системы уравнений Пфаффа (3).

5. Преобразование системы уравнений Пфаффа по известным первым интегралам

Преобразование системы уравнений Пфаффа по её функционально независимым первым интегралам. Критерий наличия функционально независимых первых интегралов системы уравнений Пфаффа, связанный с её приведением к специальному виду.

Теорема 1. *Если система уравнений Пфаффа (Pf) имеет k , $1 \leq k \leq m$, функционально независимых на области Ω первых интегралов (2.2), то на подобласти $\hat{\Omega}$ области Ω такой, что $\mu_{C\Omega}\hat{\Omega} = 0$, с помощью невырожденного линейного преобразования 1-форм (1.0) она приводится к виду*

$$dF_{\xi}(x) = 0, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad (1)$$

$$\omega_{j_{\lambda}}(x) = 0, \quad j_{\lambda} = \{1, \dots, m\}, \quad \lambda = \overline{1, m-k}.$$

Доказательство. Если голоморфные функции (2.2) являются первыми интегралами на области Ω системы (Pf), то согласно определению 1.1 существуют такие голоморфные функции

$$b_{\xi j}: \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m},$$

что полные дифференциалы

$$dF_{\xi}(x) = \sum_{j=1}^m b_{\xi j}(x) \omega_j(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Так как первые интегралы (2.2) функционально независимы на области Ω , а 1-формы (1.0) не являются голоморфно линейно связанными на области V , то у составленной из коэффициентов разложений (2) матрицы

$$b(x) = \|b_{\xi j}(x)\|_{k \times m}, \quad \forall x \in \Omega,$$

ранг

$$\text{rank } b(x) = k, \quad \forall x \in \widehat{\Omega},$$

где $\widehat{\Omega}$ — такая подобласть области Ω , что $\mu C_{\Omega} \widehat{\Omega} = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что квадратная матрица

$$\widehat{b}(x) = \|b_{\xi j}(x)\|, \quad \forall x \in \widehat{\Omega},$$

порядка k , полученная из сужения на область $\widehat{\Omega}$ матрицы b вычёркиванием последних $m-k$ столбцов, является невырожденной на области $\widehat{\Omega}$ (этого всегда можно добиться перенумерованием 1-форм ω_j , $j = \overline{1, m}$).

Тогда с помощью невырожденного на области $\widehat{\Omega}$ линейного преобразования 1-форм

$$l_{\xi} = \sum_{j=1}^m b_{\xi j}(x) \omega_j, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad l_{\theta} = \omega_{\theta}, \quad \theta = \overline{k+1, m},$$

систему (Pf) приводим к виду (1). ■

Дифференциальная система (1), будучи системой уравнений Пфаффа, построена на основании дифференциальных форм

$$\widehat{\omega}_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i F_{\xi}(x) dx_i, \quad \xi = \overline{1, k},$$

$$\omega_{j_{\lambda}}(x), \quad j_{\lambda} \in \{1, \dots, m\}, \quad \lambda = \overline{1, m-k}, \quad \forall x \in \widehat{\Omega},$$

которые не являются голоморфно линейно связанными на $\widehat{\Omega}$.

В этой связи имеет место

Теорема 2. *Сужения на подобласть $\hat{\Omega}$ области Ω такой, что $\mu_{S\Omega}\hat{\Omega} = 0$, функций (2.2) являются k , $1 \leq k \leq t$, функционально независимыми первыми интегралами на области $\hat{\Omega}$ системы уравнений Пфаффа (1).*

На основании теорем 1 и 2 введём критерий наличия функционально независимых первых интегралов у системы Пфаффа.

Теорема 3. *Система уравнений Пфаффа (Pf) имеет k , $1 \leq k \leq t$, функционально независимых первых интегралов на области Ω , $\Omega \subset V$, тогда и только тогда, когда на области Ω с помощью невырожденного линейного преобразования 1-форм (1.0) она приводится к виду (1).*

6. Замкнутые системы

Определение замкнутой системы уравнений Пфаффа. Критерий замкнутости на основании базиса первых интегралов. Критерий замкнутости на основании приведения системы Пфаффа к специальному виду.

Определение 1. *Систему уравнений Пфаффа (Pf) назовём **замкнутой** на подобласти Ω области V , если контрагредиентная линейная однородная система уравнений в частных производных (2.4) является полной на области Ω .*

Например, по определению 1, система уравнений Пфаффа (3.4) является замкнутой на области $\tilde{\Omega}$ ввиду того, что контрагредиентная система уравнений в частных производных (4.4) является полной на этой области.

Полноту системы (4.4) устанавливаем по предложению 4.5.3, исходя из того, что её базис первых интегралов (5.4) имеет размерность $n - t = 4 - 2 = 2$.

Теорема 1. *Система уравнений Пфаффа (Pf) является замкнутой на подобласти H области V тогда и только тогда, когда на области H она имеет базис первых интегралов размерности t .*

Действительно, по свойству 1.5.3, базис первых интегралов полной системы (2.4) в окрестности каждой точки из её области нормализации H имеет размерность t .

В соответствии с теоремой 1.4 у замкнутой системы Пфаффа (Pf) и у контрагредиентной полной линейной однородной системы

уравнений в частных производных (2.4) размерности интегральных базисов одинаковые и, стало быть, равны m .

Тогда согласно предложению 4.5.3 система (Pf) будет замкнутой на области H , если и только если на H размерность её интегрального базиса равна m . ■

Теорема 1 выражает критерий замкнутости системы Пфаффа на основании размерности её базиса первых интегралов.

Например, по теореме 1, системы Пфаффа (5.2), (6.2) и (3.4) являются замкнутыми как имеющие интегральные базисы, размерности которых равны числу уравнений, составляющих системы (5.2), (6.2) и (3.4) соответственно. При этом учитываем, что как система (5.2), так система (6.2) и система (3.4) заданы 1-формами, которые не являются голоморфно линейно связанными.

В теореме 1 в качестве области H можно взять область нормализации (определение 1.4.3) системы (2.4).

Из теоремы 3.5 при $k = m$ и теоремы 1 получаем ещё один критерий замкнутости системы Пфаффа [78, с. 110 – 111].

Теорема 2. Система уравнений Пфаффа (Pf) является замкнутой на области Ω , $\Omega \subset V$, тогда и только тогда, когда на области Ω с помощью невырожденного линейного преобразования 1-форм (1.0) она приводится к дифференциальной системе

$$dF_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Например, систему (5.2) с помощью невырожденного на \mathbb{K}^4 линейного преобразования 1-форм

$$\ell_1(x) = 2\omega_1(x) + 2(1 - x_2)\omega_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

$$\ell_2(x) = 2\omega_1(x) - 2(1 + x_2)\omega_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

приводим к системе

$$\ell_1(x) \equiv 4x_1 dx_1 + 2(x_3 + x_4) dx_3 + 2(x_3 + x_4) dx_4 = 0,$$

$$\ell_2(x) \equiv 4x_2 dx_2 + 2(x_3 - x_4) dx_3 - 2(x_3 - x_4) dx_4 = 0,$$

которая имеет вид

$$d(2x_1^2 + (x_3 + x_4)^2) = 0, \quad d(2x_2^2 + (x_3 - x_4)^2) = 0.$$

По теореме 2, система (5.2) является замкнутой на \mathbb{K}^4 .

Если использовать невырожденное на \mathbb{K}^4 линейное преобразование 1-форм

$$\ell_1(x) = 2\omega_1(x) + 2(1 - x_2)\omega_2(x), \quad \ell_3(x) = \omega_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

то систему (5.2) приведём к виду

$$\ell_1(x) \equiv 4x_1 dx_1 + 2(x_3 + x_4) dx_3 + 2(x_3 + x_4) dx_4 = 0,$$

$$\ell_3(x) \equiv \omega_2(x) \equiv x_1 dx_1 - x_2 dx_2 + x_4 dx_3 + x_3 dx_4 = 0.$$

Отсюда, выделяя полные дифференциалы, получаем

$$d(2x_1^2 + (x_3 + x_4)^2) = 0, \quad d(x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4) = 0.$$

По теореме 2, система (5.2) на \mathbb{K}^4 является замкнутой и имеет первые интегралы

$$F_1: x \rightarrow 2x_1^2 + (x_3 + x_4)^2, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

и

$$F_3: x \rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4.$$

Так как матрица Якоби

$$J(F_1, F_3; x) = \begin{vmatrix} 4x_1 & 0 & 2(x_3 + x_4) & 2(x_3 + x_4) \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_4 & 2x_3 \end{vmatrix}$$

на \mathbb{K}^4 имеет $\text{rank } J(F_1, F_3; x) = 2$, то на \mathbb{K}^4 первые интегралы F_1 и F_3 функционально независимы, а значит, образуют интегральный базис системы (5.2).

7. Интерпретация замкнутости в терминах дифференциальных форм

Теорема Фробениуса замкнутости системы уравнений Пфаффа.

Лемма 1. Для голоморфных на области V из пространства \mathbb{K}^n линейных дифференциальных форм

$$\omega_\rho(x), \quad \forall x \in V, \quad \rho = \overline{1, s}, \quad (1)$$

система внешних дифференциальных тождеств

$$d\omega_\rho(x) \wedge \omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \wedge \dots \wedge \omega_s(x) = 0, \quad \forall x \in V, \quad \rho = \overline{1, s}, \quad (2)$$

инвариантна относительно невырожденного на области V линейного преобразования 1-форм (1).

Доказательство. Пусть линейные дифференциальные формы l_δ , $\delta = \overline{1, s}$, суть невырожденные на области V линейные комбинации 1-форм (1), то есть, представимы в виде

$$l_\delta(x) = \sum_{\rho=1}^s \Psi_{\delta\rho}(x) \omega_\rho(x), \quad \forall x \in V, \quad \delta = \overline{1, s}, \quad (3)$$

где функции $\Psi_{\delta\rho}: V \rightarrow \mathbb{K}$, $\delta, \rho = \overline{1, s}$, голоморфны на V , а квадратная матрица $\Psi(x) = \|\Psi_{\delta\rho}(x)\|$ порядка s невырождена на V .

Тогда внешнее произведение

$$\bigwedge_{\rho=1}^s l_\rho(x) = \det \Psi(x) \left(\bigwedge_{\rho=1}^s \omega_\rho(x) \right), \quad \forall x \in V.$$

Отсюда следует, что система тождеств

$$dl_\delta(x) \wedge \left(\bigwedge_{\rho=1}^s l_\rho(x) \right) = 0, \quad \forall x \in V, \quad \delta = \overline{1, s}, \quad (4)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$dl_\delta(x) \wedge \left(\bigwedge_{\rho=1}^s \omega_\rho(x) \right) = 0, \quad \forall x \in V, \quad \delta = \overline{1, s}. \quad (5)$$

В соответствии с представлениями (3) внешние дифференциалы на области V

$$dl_\delta(x) = \sum_{\rho=1}^s \Psi_{\delta\rho}(x) \omega_\rho(x) + \sum_{\rho=1}^s d\Psi_{\delta\rho}(x) \wedge \omega_\rho(x), \quad \delta = \overline{1, s}.$$

Поэтому внешние произведения

$$\begin{aligned}
 dl_\delta(x) \wedge \omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \wedge \dots \wedge \omega_s(x) = \\
 = \sum_{\rho=1}^s \Psi_{\delta\rho}(x) d\omega_\rho(x) \wedge \left(\bigwedge_{\rho=1}^s \omega_\rho(x) \right), \quad \forall x \in V, \delta = \overline{1, s}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая тождества (2), из тождеств (6) следуют тождества (5), а значит, имеют место тождества (4).

Это означает, что система тождеств (2) инвариантна при невырожденном линейном преобразовании (3) 1-форм (1). ■

Теорема 1. *Если система уравнений Пфаффа (Pf) имеет m функционально независимых на области Ω , $\Omega \subset V$, первых интегралов, то внешние произведения*

$$d\omega_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m \omega_\zeta(x) \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega, j = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть система Пфаффа (Pf) имеет m функционально независимых на подобласти Ω области V первых интегралов

$$F_j: x \rightarrow F_j(x), \quad \forall x \in \Omega, j = \overline{1, m}. \tag{8}$$

По определению 1.1, полные дифференциалы

$$dF_j(x) = \sum_{\zeta=1}^m b_{j\zeta}(x) \omega_\zeta(x), \quad \forall x \in \Omega, j = \overline{1, m}, \tag{9}$$

где функции $b_{j\zeta}: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, $j, \zeta = \overline{1, m}$, голоморфны на области Ω , а квадратная матрица $b(x) = \|b_{j\zeta}(x)\|$ порядка m невырождена на подобласти $\widehat{\Omega}$ области Ω такой, что мера дополнения $\mu C_\Omega \widehat{\Omega} = 0$ (см. доказательство теоремы 1.5).

Для 1-форм

$$l_j(x) = \sum_{\zeta=1}^m b_{j\zeta}(x) \omega_\zeta(x), \quad \forall x \in \Omega, j = \overline{1, m}, \tag{10}$$

с учётом тождеств (9) и теоремы Пуанкаре (теорема 1 из второго пункта введения) о том, что для любой голоморфной на области V дифференциальной q -формы θ имеет место тождество

$$d(d\theta(x)) = 0, \forall x \in V,$$

которое относительно первых интегралов (8) означает, что

$$d^2 F_j(x) = 0, \forall x \in \Omega, j = \overline{1, m}, \quad (11)$$

получаем, что внешние произведения

$$dl_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m l_\zeta(x) \right) = 0, \forall x \in \Omega, j = \overline{1, m}. \quad (12)$$

Из представлений (10) и невырожденности на области $\widehat{\Omega}$ матрицы b следует, что на области $\widehat{\Omega}$ линейные дифференциальные формы $l_j, j = \overline{1, m}$, есть результат невырожденного на $\widehat{\Omega}$ линейного преобразования сужений на $\widehat{\Omega}$ линейных дифференциальных форм $\omega_j, j = \overline{1, m}$.

Поэтому в соответствии с леммой 1 тождества (12) выполняются тогда и только тогда, когда имеют место тождества

$$d\omega_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m \omega_\zeta(x) \right) = 0, \forall x \in \widehat{\Omega}, j = \overline{1, m}.$$

Отсюда, учитывая голоморфность на области Ω 1-форм $\omega_j, j = \overline{1, m}$, и то, что $\mu C_\Omega \widehat{\Omega} = 0$, продолжением на область Ω получаем тождества (7). ■

Из теорем 1.6 и 1 следует

Теорема 2. *Если система уравнений Пфаффа (Pi) замкнута на подобласти H области V , то внешние произведения*

$$d\omega_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m \omega_\zeta(x) \right) = 0, \forall x \in H, j = \overline{1, m}.$$

Теорема 3. *При выполнении системы внешних дифференциальных тождеств*

$$d\omega_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m \omega_\zeta(x) \right) = 0, \quad \forall x \in V, \quad j = \overline{1, m}, \quad (13)$$

система уравнений Пфаффа (Pf) будет замкнутой на такой подобласти Ω области V , что мера дополнения $\mu C_V \Omega = 0$.

Доказательство. Внешние произведения

$$d\omega_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m \omega_\zeta(x) \right), \quad \forall x \in V, \quad j = \overline{1, m},$$

при $n - m = 0$ суть $(n + 2)$ -формы от n переменных, а при $n - m = 1$ есть $(n + 1)$ -формы от n переменных.

В каждом из этих случаев тождества (13) имеют место на области V . А то, что система Пфаффа (Pf) при $n - m = 0$ и при $n - m = 1$ является замкнутой на области Ω , $\Omega \subset V$, $\mu C_V \Omega = 0$, докажем следующим образом.

Если $n - m = 0$, то система (Pf) на области Ω имеет n первых интегралов (1.2) (предложение 1.2), которые образуют её интегральный базис на области Ω (предложение 2.2).

В соответствии с теоремой 1.6 система (Pf) при $n - m = 0$ будет замкнутой на области Ω .

Пусть $n - m = 1$. Тогда у системы Пфаффа (Pf) матрица (3.1) имеет размеры $(n - 1) \times n$, а её ранг

$$\text{rank } w(x) = n - 1, \quad \forall x \in \tilde{\Omega},$$

где область $\tilde{\Omega} \subset V$, $\mu C_V \tilde{\Omega} = 0$ (см. пункт 1).

Следовательно, на некоторой области Ω , которая содержится в области $\tilde{\Omega}$ и мера $\mu C_{\tilde{\Omega}} \Omega = 0$, система (Pf) разрешима относительно $m = n - 1$ дифференциалов (скажем, dx_1, \dots, dx_{n-1}) и, тем самым, приводится к обыкновенной дифференциальной системе $(n - 1)$ -го порядка

$$\frac{dx_\tau}{dx_n} = p_\tau(x_1, \dots, x_n), \quad \tau = \overline{1, n - 1}, \quad (14)$$

с голоморфными правыми частями $p_\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, $\tau = \overline{1, n - 1}$.

Система (14) имеет $n - 1$ функционально независимых на области Ω первых интегралов (теорема 1.3.2 при $m = 1$).

Значит, система Пфаффа (Pf) при $n - m = 1$ имеет на области Ω такой, что $\Omega \subset V$ и мера $\mu C_V \Omega = 0$ (так как $\mu C_{\tilde{\Omega}} \Omega = 0$ и $\mu C_V \tilde{\Omega} = 0$), базис первых интегралов размерности $m = n - 1$.

По теореме 1.6, система (Pf) при $n - m = 1$ замкнута на Ω .

Итак, для систем Пфаффа коразмерности нуль ($n - m = 0$) и коразмерности один ($n - m = 1$) теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 3 в случаях, когда система уравнений Пфаффа имеет коразмерность $s > 1$ ($n - m = s$), используем метод математической индукции.

Допустим, что теорема 3 имеет место при $n - m = s$, $s > 1$, то есть, если выполняется система внешних дифференциальных тождеств (13) при $m = n - s$, $s > 1$, то система уравнений Пфаффа (Pf) коразмерности s будет замкнутой на области Ω , когда $\Omega \subset V$ и $\mu C_V \Omega = 0$.

А если основываться на теореме 2.6, то тем самым допускаем, что в случае, когда имеет место система внешних дифференциальных тождеств (13) при $m = n - s$, $s > 1$, существует невырожденное на области Ω такой, что $\Omega \subset V$, $\mu C_V \Omega = 0$, линейное преобразование 1-форм, с помощью которого система Пфаффа (Pf) коразмерности s приводится к дифференциальной системе

$$dF_j(x) = 0, j = \overline{1, m}, m = n - s, s > 1.$$

Рассмотрим систему Пфаффа (Pf) коразмерности $s + 1$.

Пусть имеет место система внешних дифференциальных тождеств (13) при $m = n - (s + 1)$, $s > 1$.

Тождества (13) при $m = n - (s + 1)$, $s > 1$, если зафиксировать x_n , соответствуют тождествам (13) при $m = n - s$, $s > 1$. А значит, согласно допущению существует невырожденное на области Ω , $\Omega \subset V$, $\mu C_V \Omega = 0$, линейное преобразование 1-форм, с помощью которого система (Pf) при $m = n - (s + 1)$, $s > 1$, приводится к системе Пфаффа

$$l_j(x) = 0, j = \overline{1, m}, m = n - (s + 1), s > 1, \quad (15)$$

где на области Ω 1-формы

$$l_j(x) = dF_j(x) + g_j(x) dx_n, \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1. \quad (16)$$

С учётом тождеств Пуанкаре (11) при $m = n - (s + 1)$, $s > 1$, находим внешние дифференциалы 1-форм (16):

$$dl_j(x) = dg_j(x) \wedge dx_n, \quad \forall x \in \Omega, \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1. \quad (17)$$

С другой стороны, 1-формы l_j , $j = \overline{1, n-s-1}$, $s > 1$, есть результат невырожденного на области Ω , $\Omega \subset V$, $\mu C_V \Omega = 0$, линейного преобразования 1-форм ω_j , $j = \overline{1, n-s-1}$, $s > 1$. Поэтому в силу леммы 1 внешние произведения

$$dl_j(x) \wedge \left(\bigwedge_{\zeta=1}^m l_\zeta(x) \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1,$$

и, следовательно, на области Ω внешние дифференциалы

$$dl_j(x) = \sum_{\zeta=1}^m Q_{j\zeta}(x) \wedge l_\zeta(x), \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1. \quad (18)$$

Сопоставляя тождества (17) и (18), получаем, что на области Ω полные дифференциалы

$$\begin{aligned} dg_j(x) &= \sum_{\zeta=1}^m h_{j\zeta}(x) (dF_\zeta(x) + g_\zeta(x) dx_n) = \\ &= \sum_{\zeta=1}^m h_{j\zeta}(x) dF_\zeta(x) + h_j(x) dx_n, \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1, \end{aligned}$$

где

$$h(x) = \sum_{\zeta=1}^m h_{j\zeta}(x) g_\zeta(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1.$$

Отсюда следует, что на области Ω

$$g_j(x) = \widehat{g}_j(F_1(x), \dots, F_m(x), x_n), \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1,$$

где $\widehat{g}_j, j = \overline{1, n-s-1}, s > 1$, есть голоморфные функции от $m+1$ переменных F_1, \dots, F_m, x_n .

Тогда уравнения (15) при (16) будут иметь вид

$$dF_j + \widehat{g}_j(F_1, \dots, F_m, x_n) dx_n = 0, \quad j = \overline{1, n-s-1}, \quad s > 1.$$

Эта система как обыкновенная дифференциальная система m -го порядка имеет базис первых интегралов размерности m , $m = n - (s+1), s > 1$ (теорема 1.3.2 при $m = 1$). Он является базисом первых интегралов на области Ω и системы (Pf) при $n - m = s + 1, s > 1$.

По теореме 1.6, система (Pf) при $n - m = s + 1, s > 1$, является замкнутой на области Ω . ■

В ходе доказательства теоремы 3 были доказаны

Следствие 1. Система Пфаффа (Pf) при $m = n - 1$ является замкнутой на такой подобласти Ω области V , что мера $\mu_{C_V} \Omega = 0$.

Следствие 2. Система Пфаффа (Pf) при $m = n - 1$ с помощью невырожденного на области $\Omega, \Omega \subset V, \mu_{C_V} \Omega = 0$, линейного преобразования 1-форм (1.0) приводится к интегрально равносильной на этой области обыкновенной дифференциальной системе $(n-1)$ -го порядка (14).

Из теорем 2 и 3 получаем критерий замкнутости системы уравнений Пфаффа с помощью внешнего произведения дифференциальных форм [78, с. 110 – 112; 118, с. 131 – 136].

Теорема 4. Система уравнений Пфаффа (Pf) является замкнутой на области $\Omega, \Omega \subset V, \mu_{C_V} \Omega = 0$, тогда и только тогда, когда выполняется система внешних дифференциальных тождеств (13).

Систему внешних дифференциальных тождеств (13) будем называть *условием Фробениуса* [76, с. 302] замкнутости системы уравнений Пфаффа (Pf).

Например, для уравнения Пфаффа на \mathbb{R}^3

$$\omega(x, y, z) \equiv P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0$$

условие Фробениуса (13) будет иметь вид [78, с. 112]

$$\begin{aligned}\omega \wedge d\omega &= (P dx + Q dy + R dz)((\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz + \\ &+ (\partial_z P - \partial_x R) dz \wedge dx + (\partial_x Q - \partial_y P) dx \wedge dy) = \\ &= (P(\partial_y R - \partial_z Q) + Q(\partial_z P - \partial_x R) + R(\partial_x Q - \partial_y P)) dx \wedge dy \wedge dz = \\ &= 0, \forall (x, y, z) \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

В теории поля это условие Фробениуса означает [76, с. 222; 16, с. 16 – 18], что голоморфное на области Ω векторное поле

$$A: (x, y, z) \rightarrow P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

должно быть ортогональным к своему вихрю

$$\begin{aligned}\text{rot } A(x, y, z) &= (\partial_y R(x, y, z) - \partial_z Q(x, y, z)) \vec{i} + \\ &+ (\partial_z P(x, y, z) - \partial_x R(x, y, z)) \vec{j} + (\partial_x Q(x, y, z) - \partial_y P(x, y, z)) \vec{k}.\end{aligned}$$

Так, на свойстве ортогональности вихря векторного поля A к полю A основан метод Бертрана [54, с. 489 – 491] интегрирования уравнения Пфаффа от трёх переменных.

Заметим, что теорема Фробениуса [16, с. 20 – 24] о полной разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах является аналогом теоремы 4.

8. Незамкнутые системы

Незамкнутая система уравнений Пфаффа. Нахождение размерности базиса первых интегралов незамкнутой системы уравнений Пфаффа через дефект контрагredientной линейной однородной системы уравнений в частных производных. Размерность базиса первых интегралов системы уравнений Пфаффа.

Рассмотрим систему Пфаффа (Pf), для которой контрагredientная линейная однородная система уравнений в частных производных (2.4) является неполной на области $\tilde{\Omega}$ (п. 3, § 3).

В этом случае систему Пфаффа (Pf) будем называть *незамкнутой* на области $\tilde{\Omega}$.

Дополним (уравнениями видов (4.3.3)) систему (2.4) до полной и, тем самым, найдём её дефект r , $1 < r \leq m$.

У полученной полной системы найдём область нормализации H , $H \subset \tilde{\Omega} \subset V$ (определение 1.4.3).

Тогда в соответствии с теоремой 1.4 имеет место

Теорема 1. *Незамкнутая на области $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} \subset V$, система Пфаффа (Pf) имеет на области нормализации H , $H \subset \tilde{\Omega}$, контрагredientной линейной однородной системы уравнений в частных производных (2.4) базис первых интегралов размерности $m - r$, где r — дефект системы (2.4).*

Если исходить из соглашения о том, что у полной системы (2.4) дефект $r = 0$, то на основании теорем 1.6 и 1 получаем обобщающее утверждение о базисе первых интегралов системы Пфаффа (Pf), когда она является замкнутой или незамкнутой.

Теорема 2. *Система уравнений Пфаффа (Pf) на области нормализации H , $H \subset V$, контрагredientной линейной однородной системы уравнений в частных производных (2.4) имеет базис первых интегралов размерности $m - r$, где r есть дефект системы (2.4), $0 \leq r \leq m$.*

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &\equiv dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 = 0, \\ \omega_2(x) &\equiv dx_1 + 2dx_2 + x_4 dx_3 + dx_4 = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Линейные дифференциальные формы ω_1 и ω_2 дополним двумя линейными дифференциальными формами

$$\omega_3(x) = dx_3, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4, \quad \text{и} \quad \omega_4(x) = dx_4, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

так, что все они в совокупности ω_i , $i = \overline{1, 4}$, не будут голоморфно линейно связанными на \mathbb{K}^4 .

По контрагredientным к 1-формам ω_i , $i = \overline{1, 4}$, линейным дифференциальным операторам

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_1(x) &= 2\partial_1 - \partial_2, \quad \mathfrak{G}_2(x) = -\partial_1 + \partial_2, \\ \mathfrak{G}_3(x) &= (x_4 - 2)\partial_1 + (1 - x_4)\partial_2 + \partial_3, \quad \mathfrak{G}_4(x) = -\partial_1 + \partial_4,\end{aligned}$$

не являющимся голоморфно линейно связанными на пространстве \mathbb{K}^4 , строим контрагредиентную к системе Пфаффа (1) линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$(x_4 - 2)\partial_1 u + (1 - x_4)\partial_2 u + \partial_3 u = 0, \quad -\partial_1 u + \partial_4 u = 0. \quad (2)$$

Так как скобки Пуассона

$$[\mathfrak{G}_3(x), \mathfrak{G}_4(x)] = -\partial_1 + \partial_2 = \mathfrak{G}_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4,$$

то система (2) является неполной (согласно определению 1.2.3).

Стало быть, система Пфаффа (1) является незамкнутой.

С помощью оператора \mathfrak{G}_2 доопределяем систему (2) до полной

$$\mathfrak{G}_\tau(x) u = 0, \quad \tau = \overline{2, 4},$$

у которой интегральный базис на \mathbb{K}^4 состоит из одной функции

$$F: x \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad \forall x \in \mathbb{K}^4.$$

Эта функция образует интегральный базис на арифметическом пространстве \mathbb{K}^4 системы Пфаффа (1).

9. Интегральная равносильность с системой уравнений в полных дифференциалах

Приведение системы уравнений Пфаффа к интегрально равносильной системе уравнений в полных дифференциалах. Построения первого интеграла, базиса первых интегралов и установление замкнутости системы уравнений Пфаффа посредством интегрально равносильной системы уравнений в полных дифференциалах.

Ещё один подход построения базиса первых интегралов системы уравнений Пфаффа (Pf) основан на приведении её к интегрально равносильной системе уравнений в полных дифференциалах.

Линейные дифференциальные формы (1.0) не являются голоморфно линейно связанными на области V . Поэтому матрица (3.1) размера $m \times n$, $m < n$, имеет ранг

$$\text{rank } w(x) = m, \quad \forall x \in \Omega, \quad \Omega \subset V, \quad \mu C_V \Omega = 0.$$

Тогда квадратная матрица

$$\hat{w}(x) = \|w_{ji}(x)\|, \quad \forall x \in \Omega,$$

порядка m невырождена на области Ω (при необходимости изменяется нумерация переменных в системе (Pf)).

Это позволяет систему уравнений Пфаффа (Pf) привести к системе уравнений в полных дифференциалах

$$dx_j = \sum_{\tau=m+1}^n \hat{a}_{j\tau}(x) dx_\tau, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Так как система уравнений Пфаффа (Pf) и система уравнений в полных дифференциалах (1) на области Ω интегрально равносильны, то имеют место

Теорема 1. *Функция (1.1) является первым интегралом на области Ω , $\Omega \subset V$, системы уравнений Пфаффа (Pf), если и только если она является первым интегралом на области Ω системы уравнений в полных дифференциалах (1).*

Теорема 2. *Функции (2.2) образуют базис первых интегралов на области Ω , $\Omega \subset V$, системы уравнений Пфаффа (Pf) тогда и только тогда, когда они образуют базис первых интегралов на области Ω системы уравнений в полных дифференциалах (1).*

Отсюда в соответствии с теоремой 1.0.4 и теоремой 1.6 получаем следующую

Теорема 3. *Система уравнений Пфаффа (Pf) замкнута на области Ω , $\Omega \subset V$, тогда и только тогда, когда система уравнений в полных дифференциалах (1) на этой области вполне разрешима.*

Пример 1. Систему уравнений Пфаффа

$$2x_1(1+x_2)dx_1 + 6x_2dx_2 + 3x_3(2+x_2)dx_3 + 3x_4(2+x_2)dx_4 = 0, \quad (2)$$

$$4x_1(1+x_1)dx_1 - 6x_2dx_2 + 3x_3(1+2x_1)dx_3 + 3x_4(1+2x_1)dx_4 = 0$$

приводим к интегрально равносильной на любой области Ω из множества $V = \{x: 3+2x_1+x_2 \neq 0, x_1x_2 \neq 0\}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, системе уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
 dx_1 &= -\frac{3x_3}{2x_1} dx_3 - \frac{3x_4}{2x_1} dx_4, \\
 dx_2 &= -\frac{x_3}{2x_2} dx_3 - \frac{x_4}{2x_2} dx_4.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Так как скобки Пуассона

$$\left[\partial_3 - \frac{3x_3}{2x_1} \partial_1 - \frac{x_3}{2x_2} \partial_2, \partial_4 - \frac{3x_4}{2x_1} \partial_1 - \frac{x_4}{2x_2} \partial_2 \right] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in V,$$

то (теорема 2.2.1) система (3) является вполне разрешимой на Ω .

По теореме 3, система уравнений Пфаффа (2) замкнута на Ω .

Система уравнений в полных дифференциалах (3) интегрально равносильна на области Ω системе уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned}
 2x_1 dx_1 + 3x_3 dx_3 + 3x_4 dx_4 &= 0, \\
 2x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Отсюда, выделяя полные дифференциалы, получаем систему

$$d(2x_1^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2) = 0, \quad d(2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

и устанавливаем, что функции

$$F_1: x \rightarrow 2x_1^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 \quad \text{и} \quad F_2: x \rightarrow 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2
 \tag{5}$$

являются первыми интегралами на \mathbb{K}^4 системы (4), а сужения функций (5) на область Ω — системы (3).

Так как матрица Якоби

$$J(F_1, F_2; x) = \left\| \begin{array}{cccc} 4x_1 & 0 & 6x_3 & 6x_4 \\ 0 & 4x_2 & 2x_3 & 2x_4 \end{array} \right\|$$

на пространстве \mathbb{K}^4 имеет

$$\text{rank } J(F_1, F_2; x) = 2,$$

то на \mathbb{K}^4 первые интегралы (5) функционально независимы, а значит, образуют интегральный базис системы уравнений Пфаффа (2).

Пример 2. Систему уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned} dx_1 + dx_2 - (1 + 2x_1 + 2x_2)dx_3 - (4x_1 + 3x_2)dx_4 &= 0, \\ dx_1 - dx_2 + (1 + 2x_2)dx_3 - (2x_1 - 3x_2)dx_4 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

приводим к интегрально равносильной на пространстве \mathbb{K}^4 системе уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 dx_3 + 3x_1 dx_4, \\ dx_2 &= (1 + x_1 + 2x_2)dx_3 + (x_1 + 3x_2)dx_4. \end{aligned} \quad (7)$$

В любой точке x пространства \mathbb{K}^4 скобки Пуассона

$$[\partial_3 + x_1\partial_1 + (1 + x_1 + 2x_2)\partial_2, \partial_4 + 3x_1\partial_1 + (x_1 + 3x_2)\partial_2] = (3 - x_1)\partial_2,$$

а значит (теорема 2.2.1), система (7) не является вполне разрешимой на пространстве \mathbb{K}^4 .

По теореме 3, система Пфаффа (6) будет незамкнутой на \mathbb{K}^4 .

Для системы уравнений в полных дифференциалах (7) строим ассоциированную линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \partial_3 y + x_1 \partial_1 y + (1 + x_1 + 2x_2) \partial_2 y &= 0, \\ \partial_4 y + 3x_1 \partial_1 y + (x_1 + 3x_2) \partial_2 y &= 0, \end{aligned}$$

которая на \mathbb{K}^4 является неполной и имеет интегральный базис, состоящий из одной функции

$$F: x \rightarrow x_1 \exp(-x_3 - 3x_4), \quad \forall x \in \mathbb{K}^4. \quad (8)$$

Согласно предложению 1.5.3 функция (8) на \mathbb{K}^4 образует базис первых интегралов не являющейся вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (7).

Тогда, по теореме 2, скалярная функция (8) на пространстве \mathbb{K}^4 образует базис первых интегралов незамкнутой системы уравнений Пфаффа (6).

§ 7. Цилиндричность и автономность первых интегралов

1. Цилиндричность первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных

(n - k)-цилиндричные первые интегралы системы (∂). Необходимый признак существования (n - k)-цилиндричных первых интегралов. Критерий существования (n - k)-цилиндричного первого интеграла. Построение функционально независимых (n - k)-цилиндричных первых интегралов.

Определение 1. *Первый интеграл F системы (∂) назовём **(n - k)-цилиндричным**, если функция F зависит только от k, 0 ≤ k ≤ n, переменных x₁, ..., x_n.*

Поставим для системы уравнений в частных производных (∂) задачу существования (n - k)-цилиндричного первого интеграла

$$F: x \rightarrow F(kx), \forall x \in \mathcal{X}', \quad (1)$$

где $kx = (x_1, \dots, x_k)$.

Согласно определению 1.1.3 функция (1) будет (n - k)-цилиндричным первым интегралом на области \mathcal{X}' системы (∂) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{L}_{jk} F(kx) = 0, \forall x \in \mathcal{X}', j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где операторы

$$\mathfrak{L}_{jk}(x) = \sum_{\tau=1}^k u_{j\tau}(x) \partial_{\tau}, \forall x \in \mathcal{X}, j = \overline{1, m}.$$

Относительно совокупностей

$$M_j = \{u_{j1}(x), \dots, u_{jk}(x)\}, j = \overline{1, m},$$

система тождеств (2) означает, что при всяких фиксированных значениях переменных $x_i, i = \overline{1, n}, i \neq p$, функции каждой из

совокупностей M_j , $j = \overline{1, m}$, линейно зависят по переменной x_p на области \mathcal{X} . Это имеет место при каждом фиксированном индексе $p = \overline{k+1, n}$.

Поэтому вронскианы по переменным x_p , $p = \overline{k+1, n}$, каждой из совокупностей M_j , $j = \overline{1, m}$, тождественно равны нулю на области \mathcal{X} , то есть, выполняется система тождеств

$$W_{x_p}(^k u^j(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{k+1, n}, \quad (3)$$

где векторы-функции

$$^k u^j: x \rightarrow (u_{j1}(x), \dots, u_{jk}(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m},$$

а W_{x_p} есть вронскиан по x_p .

Таким образом, доказан *необходимый признак существования* $(n-k)$ -цилиндричного первого интеграла системы (∂) .

Теорема 1. Система тождеств (3) является *необходимым условием наличия у системы (∂) $(n-k)$ -цилиндричного первого интеграла (1)*.

Пусть матрица u системы (∂) удовлетворяет условиям (3).

Составим функциональную систему

$$\begin{aligned} {}^k \varphi \ ^k u^j(x) &= 0, \quad {}^k \varphi \partial_p^\xi \ ^k u^j(x) = 0, \\ j &= \overline{1, m}, \quad p = \overline{k+1, n}, \quad \xi = \overline{1, k-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где вектор-функция

$${}^k \varphi: x \rightarrow (\varphi_1(^k x), \dots, \varphi_k(^k x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$${}^k \varphi(^k x) d^k x = 0 \quad (5)$$

и докажем следующий *критерий существования* $(n-k)$ -цилиндричного первого интеграла системы (∂) .

Теорема 2. Для того чтобы система (∂) имела $(n-k)$ -цилиндричный первый интеграл (1), необходимо и достаточ-

но существования вектора-функции ${}^k\varphi$, удовлетворяющей функциональной системе (4), такого, что функция (1) является общим интегралом уравнения Пфаффа (5) на области \tilde{X}^k , являющейся естественной проекцией области X' на координатное подпространство O^kx .

Доказательство. Необходимость. Пусть система (∂) имеет $(n - k)$ -цилиндричный первый интеграл (1) на области X' . Тогда выполняются тождества (2):

$$\sum_{\tau=1}^k u_{j\tau}(x) \partial_{\tau} F({}^kx) = 0, \quad \forall x \in X', \quad j = \overline{1, m}.$$

Дифференцируя эти тождества $k - 1$ раз по x_{k+1}, \dots, x_n , убеждаемся, что продолжение на область X' функции

$${}^k\varphi: {}^kx \rightarrow (\partial_1 F({}^kx), \dots, \partial_k F({}^kx)), \quad \forall {}^kx \in \tilde{X}^k,$$

является решением функциональной системы (4).

Отсюда также следует, что функция (1) будет общим интегралом на области \tilde{X}^k уравнения Пфаффа (5).

Достаточность. Пусть вектор-функция

$${}^k\varphi: x \rightarrow {}^k\varphi({}^kx), \quad \forall x \in X',$$

является решением системы (4), а уравнение Пфаффа (5), составленное на его основании, имеет общий интеграл (1) на \tilde{X}^k .

Тогда на области \tilde{X}^k выполняется система тождеств

$$\partial_{\tau} F({}^kx) - \varphi_{\tau}({}^kx) = 0, \quad \tau = \overline{1, k}. \quad (6)$$

Отсюда с учётом того, что функция ${}^k\varphi$ является решением функциональной системы (4), получаем систему тождеств (2).

Следовательно, функция (1) является $(n - k)$ -цилиндричным первым интегралом системы (∂) . ■

Пример 1. Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_1(x)y = 0, \quad \mathfrak{L}_2(x)y = 0, \quad (7)$$

построенную на основании не являющихся голоморфно линейно связанными на \mathbb{R}^4 линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{L}_1(x) = x_1 x_2 \partial_1 y - x_1^2 \partial_2 y + (x_1 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) \partial_3 y + (x_3^2 + x_4^2) \partial_4 y,$$

$$\mathfrak{L}_2(x) = x_2^2 \partial_1 y - x_1 x_2 \partial_2 y + (x_3^2 + x_4^2) \partial_3 y + (x_1 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \partial_4 y.$$

Найдём для системы (7) 2-цилиндричный первый интеграл вида

$$F: x \rightarrow F(x_1, x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4. \quad (8)$$

У совокупностей функций

$$M_1 = \{x_1 x_2, -x_1^2\} \quad \text{и} \quad M_2 = \{x_2^2, -x_1 x_2\}$$

вронскианы по x_3 и x_4 на \mathbb{R}^4 равны:

$$W_{x_3}(x_1 x_2, -x_1^2) = 0, \quad W_{x_3}(x_2^2, -x_1 x_2) = 0,$$

$$W_{x_4}(x_1 x_2, -x_1^2) = 0, \quad W_{x_4}(x_2^2, -x_1 x_2) = 0.$$

Значит, выполняются необходимые условия (теорема 1) существования у системы (7) 2-цилиндричного первого интеграла вида (8).

Составим функциональную систему

$$x_1 x_2 \varphi_1 + (-x_1^2) \varphi_2 = 0, \quad x_2^2 \varphi_1 + (-x_1 x_2) \varphi_2 = 0,$$

$$\partial_3(x_1 x_2) \varphi_1 + \partial_3(-x_1^2) \varphi_2 = 0, \quad \partial_3 x_2^2 \varphi_1 + \partial_3(-x_1 x_2) \varphi_2 = 0,$$

$$\partial_4(x_1 x_2) \varphi_1 + \partial_4(-x_1^2) \varphi_2 = 0, \quad \partial_4 x_2^2 \varphi_1 + \partial_4(-x_1 x_2) \varphi_2 = 0.$$

Отсюда получаем систему

$$x_1 x_2 \varphi_1 - x_1^2 \varphi_2 = 0, \quad x_2^2 \varphi_1 - x_1 x_2 \varphi_2 = 0,$$

которую приводим к уравнению

$$x_2 \varphi_1 - x_1 \varphi_2 = 0.$$

Решением этого уравнения на \mathbb{R}^4 будут, например, функции

$$\varphi_1: x \rightarrow x_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad \text{и} \quad \varphi_2: x \rightarrow x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Составленное на основании этого решения уравнение Пфаффа

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$$

имеет общий интеграл

$$F: (x_1, x_2) \rightarrow x_1^2 + x_2^2, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, система (7) на \mathbb{R}^4 имеет 2-цилиндричный первый интеграл

$$F: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2, \forall x \in \mathbb{R}^4. \quad (9)$$

Так как скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] = & -x_2(x_1^2 + x_2^2)\partial_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2)\partial_2 + \\ & + (x_1 + 2x_1x_4 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2^2 + 2x_2^2x_4 + 4x_3^2x_4 - 2x_3x_4^2 + 4x_4^3)\partial_3 + \\ & + (x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_3^2 - 2x_1^2x_2 + 2x_2^2x_3 - 2x_2^2x_4 + 2x_3^3 - 4x_3x_4^2)\partial_4 \end{aligned}$$

не являются линейной комбинацией на \mathbb{R}^4 операторов \mathfrak{L}_1 и \mathfrak{L}_2 , то система (7) не является полной (определение 1.2.3).

Стало быть, базис первых интегралов системы (7) состоит с точностью до функционального выражения из не более, чем одного первого интеграла.

Таким образом, 2-цилиндричный первый интеграл (9) системы (7) образует её интегральный базис на пространстве \mathbb{R}^4 .

Предложенный в теореме 2 метод нахождения $(n-k)$ -цилиндричных первых интегралов системы (∂) может быть использован для построения некоторого количества функционально независимых $(n-k)$ -цилиндричных первых интегралов этой системы.

Теорема 3. Пусть система (4) имеет q не являющихся линейно связанными на области \mathcal{X}' решений

$${}^k\varphi^\gamma: x \rightarrow {}^k\varphi^\gamma({}^kx), \forall x \in \mathcal{X}', \gamma = \overline{1, q}, \quad (10)$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$${}^k\varphi^\gamma({}^kx) d{}^kx = 0, \gamma = \overline{1, q}, \quad (11)$$

имеют соответственно общие интегралы

$$F_\gamma: {}^kx \rightarrow F_\gamma({}^kx), \forall {}^kx \in \tilde{\mathcal{X}}^k, \gamma = \overline{1, q}, \quad (12)$$

на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$, являющейся естественной проекцией области \mathcal{X}' на координатное подпространство $O^k x$. Тогда эти общие интегралы функционально независимы на $\tilde{\mathcal{X}}^k$.

Доказательство. В силу (6) на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$

$$\partial_\tau F_\gamma({}^k x) = \varphi_\tau^\gamma({}^k x), \quad \tau = \overline{1, k}, \quad \gamma = \overline{1, q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(F_\gamma({}^k x); {}^k x) = \|\varphi_\tau^\gamma({}^k x)\|_{q \times k}, \quad \forall {}^k x \in \tilde{\mathcal{X}}^k.$$

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (10) на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$ ранг матрицы Якоби

$$\text{rank } J(F_\gamma({}^k x); {}^k x) = q$$

для всех ${}^k x$ из области $\tilde{\mathcal{X}}^k$, за исключением, быть может, множества точек k -мерной меры нуль.

Следовательно, общие интегралы (12) уравнений Пфаффа (11) функционально независимы на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$. ■

2. Первые интегралы s -неавтономных вполне разрешимых систем уравнений в полных дифференциалах

s -неавтономная система уравнений в полных дифференциалах. (CDs). Автономная система уравнений в полных дифференциалах. (ACD). (ICDs). (IACD). Условия Фробениуса полной разрешимости системы (IACD). Автономные и s -неавтономные первые интегралы. Количество функционально независимых s -неавтономных первых интегралов у системы (ICDs). Количество функционально независимых автономных первых интегралов у системы (IACD).

Определение 1. Систему (CD) назовём *s -неавтономной*, если все функции-элементы X_{ij} матрицы X зависят от x и только от s , $0 \leq s \leq m$, независимых переменных t_1, \dots, t_m .

Не умаляя общности, будем считать, что у s -неавтономной системы (CD) все функции-элементы X_{ij} матрицы X зависят только от x и от первых s независимых переменных, то есть,

$$dx = X(^st, x)dt, \quad (\text{CDs})$$

где

$$X(^st, x) = \|X_{ij}(^st, x)\|_{n \times m}, \quad \forall (^st, x) \in \mathcal{D}^{s+n},$$

$$^st = (t_1, \dots, t_s), \quad \mathcal{D}^{s+n} \subset \mathbb{R}^{s+n}, \quad 0 \leq s \leq m.$$

При $s = 0$ система (CDs) примет вид

$$dx = X(x)dt, \quad (\text{ACD})$$

её назовём **автономной**.

Вполне разрешимые системы (CDs) и (ACD) соответственно обозначим (ICDs) и (IACD).

Будем считать, что у систем уравнений в полных дифференциалах (CDs) и (ICDs) матрица $X \in C^k(\mathcal{D}^{s+n})$, а у систем (ACD) и (IACD) матрица $X \in C^k(\mathcal{X})$, $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$.

Операторы

$$\mathfrak{x}_j(x) = \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

назовём **автономными** операторами дифференцирования в силу системы (ACD).

При этом для автономных операторов (1) и неавтономных операторов

$$\mathfrak{X}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{x}_j(x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

скобки Пуассона

$$[\mathfrak{X}_j(t, x), \mathfrak{X}_\zeta(t, x)] = [\mathfrak{x}_j(x), \mathfrak{x}_\zeta(x)], \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}.$$

Условиями Фробениуса для системы (ACD) будут тождества

$$[\mathfrak{x}_j(x), \mathfrak{x}_\zeta(x)] = \mathfrak{D}, \forall x \in \mathcal{X}, j, \zeta = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Определение 2. Первый интеграл F системы (CD) назовём **s -неавтономным**, если функция F зависит от x и только от s , $0 \leq s \leq m$, независимых переменных t_1, \dots, t_m . При $s = 0$ первый интеграл

$$F: x \rightarrow F(x), \forall x \in \mathcal{X}', \mathcal{X}' \subset \mathcal{X},$$

системы (CD) назовём **автономным**.

Матрицу, полученную из матрицы $X^{(st, x)} \in \mathbb{M}^{n, m}$ вычёркиванием первых s столбцов, обозначим ${}_sX$, ${}_sX \in \mathbb{M}^{n, (m-s)}$.

Теорема 1. Если у системы (ICDs) при $X \in C^1(\mathcal{D}^{s+n})$ ранг матрицы ${}_sX^{(st, x)}$ на области \mathcal{D}^{s+n} равен k , то на этой области она имеет ровно $n - k$ функционально независимых s -неавтономных первых интегралов

$$F_\gamma: \mathcal{D}^{s+n} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma = \overline{1, n - k}.$$

Доказательство. Пусть

$$x: t \rightarrow x(t; C), \forall t \in \mathcal{T}',$$

есть решения системы (ICDs).

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что первые k строк функциональной матрицы ${}_sX$ образуют матрицу ранга k (этого всегда можно добиться перенумерованием зависимых переменных).

Тогда первые k составляющие x_l , $l = \overline{1, k}$, решений будут функционально независимыми на области \mathcal{T}' относительно переменных t_τ , $\tau = \overline{s+1, m}$, а все остальные составляющие x_r , $r = \overline{k+1, n}$, решений функционально зависят на \mathcal{T}' от первых k составляющих относительно переменных t_τ , $\tau = \overline{s+1, m}$.

Поэтому

$$x_r(t) = \Phi_r(st, {}^kx(t); C), \forall t \in \mathcal{T}',$$

где ${}^kx = (x_1, \dots, x_k)$, а функции Φ_r , $r = \overline{k+1, n}$, непрерывно дифференцируемы.

Из функционально независимой относительно t_{s+1}, \dots, t_m на области \mathcal{T}' совокупности

$$x_l = x_l(t; C), \quad l = \overline{1, k}, \quad x_r = \Phi_r(s t, {}^k x; C), \quad r = \overline{k+1, n},$$

фиксируя векторами

$$C^i = (\delta_{i1} C_1, \dots, \delta_{in} C_n), \quad i = \overline{1, n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, произвольный вектор C , находим k не являющихся s -неавтономными и $n - k$ являющихся s -неавтономными функционально независимых на подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} первых интегралов системы (ICDs). ■

Обратим внимание на согласованность по независимым переменным t_1, \dots, t_s в теореме 1 между s -неавтономностью системы (ICDs) и s -неавтономностью первых интегралов, а также на следствия из неё для автономных систем.

Теорема 2. Система (IACD) имеет ровно $n - k$, где число $k = \text{rank } X(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}'$, функционально независимых на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} автономных первых интегралов.

Пример 1 (продолжение примера 1.3.2). У матрицы X вполне разрешимой автономной системы в полных дифференциалах (3.3.2) ранг

$$\text{rank } X(x) = 2, \quad \forall x \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}.$$

В соответствии с теоремой 2 система (3.3.2) имеет

$$n - k = 3 - 2 = 1$$

автономный первый интеграл на области $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ в виде

$$F_3: x \rightarrow g(x_1, x_2) - x_3, \quad \forall x \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}.$$

Теорема 3. Система (IACD) не имеет автономных первых интегралов тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } X(x) = n$$

для всех x из области \mathcal{X} за исключением, быть может, множества точек n -мерной меры нуль.

3. s -неавтономные и $(n - k)$ -цилиндричные первые интегралы систем уравнений в полных дифференциалах

$(n - k)$ -цилиндричные первые интегралы системы (CD). Необходимый признак существования s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных первых интегралов. Критерий существования s -неавтономного $(n - k)$ -цилиндричного первого интеграла. Построение функционально независимых s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных первых интегралов.

Определение 1. Первый интеграл F системы (CD) назовём **$(n - k)$ -цилиндричным**, если функция F зависит от t и только от k , $0 \leq k \leq n$, зависимых переменных x_1, \dots, x_n .

Поставим для системы (CD) задачу существования s -неавтономного $(n - k)$ -цилиндричного первого интеграла

$$F: (t, x) \rightarrow F({}^s t, {}^k x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad (1)$$

где ${}^s t = (t_1, \dots, t_s)$, ${}^k x = (x_1, \dots, x_k)$.

Функция (1) будет s -неавтономным и $(n - k)$ -цилиндричным первым интегралом на области \mathcal{D}' системы (CD) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (определение 1.1.2)

$$\mathfrak{X}_{j sk} F({}^s t, {}^k x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где операторы

$$\mathfrak{X}_{\theta sk}(t, x) = \partial_{t_\theta} + \sum_{\xi=1}^k X_{\xi\theta}(t, x) \partial_{x_\xi}, \quad \mathfrak{X}_{\nu sk}(t, x) = \sum_{\xi=1}^k X_{\xi\nu}(t, x) \partial_{x_\xi},$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{s+1, m}.$$

Относительно совокупностей

$$M_\theta = \{1, X_{1\theta}(t, x), \dots, X_{k\theta}(t, x)\}, \quad \theta = \overline{1, s},$$

$$M_\nu = \{X_{1\nu}(t, x), \dots, X_{k\nu}(t, x)\}, \quad \nu = \overline{s+1, m},$$

система тождеств (2) означает: при всяких фиксированных значениях независимых переменных t_γ , $\gamma = \overline{1, m}$, $\gamma \neq \zeta$, и зависимых переменных x_i , $i = \overline{1, n}$, функции каждой из совокупностей M_j , $j = \overline{1, m}$, линейно зависят по независимой переменной t_ζ на области \mathcal{D} ; а при фиксированных значениях независимых переменных t_γ , $\gamma = \overline{1, m}$, и зависимых переменных x_i , $i = \overline{1, n}$, $i \neq p$, функции каждой из совокупностей M_j , $j = \overline{1, m}$, линейно зависят по переменной x_p на \mathcal{D} . Это имеет место при каждом фиксированном индексе $\zeta = \overline{s+1, m}$ и индексе $p = \overline{k+1, n}$.

Следовательно, вронскианы по независимым переменным t_ζ , $\zeta = \overline{s+1, m}$, и по зависимым переменным x_p , $p = \overline{k+1, n}$, каждой из совокупностей M_j , $j = \overline{1, m}$, тождественно равны нулю на области \mathcal{D} , то есть, на \mathcal{D} выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} W_{t_\zeta}(1, {}^kX^\theta(t, x)) &= 0, \theta = \overline{1, s}, \zeta = \overline{s+1, m}; \\ W_{t_\zeta}({}^kX^\nu(t, x)) &= 0, \nu = \overline{s+1, m}, \zeta = \overline{s+1, m}; \\ W_{x_p}(1, {}^kX^\theta(t, x)) &= 0, \theta = \overline{1, s}, p = \overline{k+1, n}; \\ W_{x_p}({}^kX^\nu(t, x)) &= 0, \nu = \overline{s+1, m}, p = \overline{k+1, n}, \end{aligned} \tag{3}$$

где векторы-функции

$${}^kX^j: (t, x) \rightarrow (X_{1j}(t, x), \dots, X_{kj}(t, x)), \forall (t, x) \in \mathcal{D}, j = \overline{1, m},$$

а W_{t_ζ} и W_{x_p} — вронскианы соответственно по t_ζ и x_p .

Установленная закономерность выражает *необходимый признак существования s -неавтономного $(n-k)$ -цилиндричного первого интеграла системы (CD)*.

Теорема 1. Система тождеств (3) является *необходимым условием наличия у системы (CD) s -неавтономного $(n-k)$ -цилиндричного первого интеграла (1)*.

Пусть матрица X удовлетворяет условиям (3).

Составим функциональную систему

$$\begin{aligned}
\psi_\theta + {}^k\varphi \, {}^kX^\theta(t, x) &= 0, \quad \theta = \overline{1, s}, \\
{}^k\varphi \, \partial_{t_\zeta}^\xi {}^kX^\theta(t, x) &= 0, \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \zeta = \overline{s+1, m}, \quad \xi = \overline{1, k}, \\
{}^k\varphi \, \partial_{x_p}^\xi {}^kX^\theta(t, x) &= 0, \quad \theta = \overline{1, s}, \quad p = \overline{k+1, n}, \quad \xi = \overline{1, k}, \\
{}^k\varphi \, {}^kX^\nu(t, x) &= 0, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \\
{}^k\varphi \, \partial_{t_\zeta}^\xi {}^kX^\nu(t, x) &= 0, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \quad \zeta = \overline{s+1, m}, \quad \xi = \overline{1, k-1}, \\
{}^k\varphi \, \partial_{x_p}^\xi {}^kX^\nu(t, x) &= 0, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \quad p = \overline{k+1, n}, \quad \xi = \overline{1, k-1},
\end{aligned} \tag{4}$$

где скалярные функции

$$\psi_\theta: (t, x) \rightarrow \psi_\theta({}^st, {}^kx), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad \theta = \overline{1, s},$$

являются координатами вектора-функции ${}^s\psi$, а вектор-функция

$${}^k\varphi: (t, x) \rightarrow (\varphi_1({}^st, {}^kx), \dots, \varphi_k({}^st, {}^kx)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'.$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$${}^s\psi({}^st, {}^kx) d{}^st + {}^k\varphi({}^st, {}^kx) d{}^kx = 0 \tag{5}$$

и докажем следующий критерий существования s -неавтономного $(n - k)$ -цилиндричного первого интеграла системы уравнений в полных дифференциалах.

Теорема 2. Для того чтобы система (CD) имела s -неавтономный $(n - k)$ -цилиндричный первый интеграл (1), необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе (4), таких, что функция (1) является общим интегралом уравнения Пфаффа (5) на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$, являющейся естественной проекцией области \mathcal{D}' на координатное подпространство $O{}^st{}^kx$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (CD) имеет s -неавтономный $(n - k)$ -цилиндричный первый интеграл (1) на области \mathcal{D}' .

Тогда выполняются тождества (2):

$$\partial_{t_\theta} F({}^s t, {}^k x) + \sum_{\tau=1}^k X_{\tau\theta}(t, x) \partial_{x_\tau} F({}^s t, {}^k x) = 0, \quad \theta = \overline{1, s},$$

$$\sum_{\tau=1}^k X_{\tau\nu}(t, x) \partial_{x_\tau} F({}^s t, {}^k x) = 0, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'.$$

Дифференцируя первые s тождеств k раз по t_{s+1}, \dots, t_m и k раз по x_{k+1}, \dots, x_n , а остальные $m - s$ тождеств $k - 1$ раз по t_{s+1}, \dots, t_m и $k - 1$ раз по x_{k+1}, \dots, x_n , убеждаемся, что продолжения на область \mathcal{D}' функций

$${}^s\psi: ({}^s t, {}^k x) \rightarrow \partial_{s_t} F({}^s t, {}^k x)$$

и

$${}^k\varphi: ({}^s t, {}^k x) \rightarrow \partial_{k_x} F({}^s t, {}^k x)$$

с множеством определения $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ являются решением функциональной системы (4), где операторы

$$\partial_{s_t} = (\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_s}), \quad \partial_{k_x} = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_k}).$$

Отсюда также следует, что функция (1) является общим интегралом на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ уравнения Пфаффа (5).

Достаточность. Пусть векторы-функции

$${}^s\psi: (t, x) \rightarrow {}^s\psi({}^s t, {}^k x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

$${}^k\varphi: (t, x) \rightarrow {}^k\varphi({}^s t, {}^k x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

являются решением системы (4), а уравнение Пфаффа (5), составленное на их основании, имеет общий интеграл (1) на $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$.

Тогда на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ выполняется система тождеств

$$\begin{aligned}\partial_{s_t} F(st, {}^kx) - {}^s\psi(st, {}^kx) &= 0, \\ \partial_{{}^kx} F(st, {}^kx) - {}^k\varphi(st, {}^kx) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Учитывая, что функции ${}^s\psi, {}^k\varphi$ являются решением функциональной системы (4), получаем систему тождеств (2), и, следовательно, функция (1) является s -неавтономным $(n - k)$ -цилиндричным первым интегралом системы (CD). ■

Предложенный в теореме 2 метод нахождения s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных первых интегралов системы (CD) может быть использован для построения некоторого количества функционально независимых s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных первых интегралов системы (CD).

Теорема 3. Пусть система (4) имеет q не являющихся линейно связанными на области \mathcal{D}' решений

$$\begin{aligned}{}^s\psi^\gamma: (t, x) &\rightarrow {}^s\psi^\gamma(st, {}^kx), \quad \gamma = \overline{1, q}, \\ {}^k\varphi^\gamma: (t, x) &\rightarrow {}^k\varphi^\gamma(st, {}^kx), \quad \gamma = \overline{1, q},\end{aligned}\tag{7}$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$${}^s\psi^\gamma(st, {}^kx) d^s t + {}^k\varphi^\gamma(st, {}^kx) d^k x = 0, \quad \gamma = \overline{1, q},\tag{8}$$

имеют соответственно общие интегралы

$$F_\gamma: (st, {}^kx) \rightarrow F_\gamma(st, {}^kx), \quad \forall (st, {}^kx) \in \tilde{\mathcal{D}}^{s+k}, \quad \gamma = \overline{1, q},\tag{9}$$

на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$, являющейся естественной проекцией области \mathcal{D}' на координатное подпространство $O^{st} {}^kx$. Тогда эти общие интегралы будут функционально независимыми на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$.

Доказательство. В силу системы тождеств (6) на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ имеем, что

$$\partial_{s_t} F_\gamma(s_t, {}^k x) = {}^s \psi^\gamma(s_t, {}^k x), \quad \gamma = \overline{1, q},$$

$$\partial_{{}^k x} F_\gamma(s_t, {}^k x) = {}^k \varphi^\gamma(s_t, {}^k x), \quad \gamma = \overline{1, q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(F_\gamma(s_t, {}^k x); {}^s t, {}^k x) = \|\Psi(s_t, {}^k x)\Phi(s_t, {}^k x)\|, \quad \forall (s_t, {}^k x) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k},$$

где матрица $\|\Psi\Phi\|$ составлена из $(q \times s)$ -матрицы

$$\Psi(s_t, {}^k x) = \|\psi_j^\gamma(s_t, {}^k x)\|, \quad \forall (s_t, {}^k x) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k},$$

и $(q \times k)$ -матрицы

$$\Phi(s_t, {}^k x) = \|\varphi_i^\gamma(s_t, {}^k x)\|, \quad \forall (s_t, {}^k x) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}.$$

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (7) на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$ ранг матрицы Якоби

$$\text{rank } J(F_\gamma(s_t, {}^k x); {}^s t, {}^k x) = q$$

для всех $(s_t, {}^k x)$ из области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$, за исключением, быть может, множества точек $(s+k)$ -мерной меры нуль.

Следовательно, общие интегралы (9) уравнений Пфаффа (8) функционально независимы на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$. ■

§ 8. Последние множители

1. Последний множитель линейной однородной системы уравнений в частных производных

Последний множитель системы (∂) . Свойство Якоби последних множителей. Построение последних множителей по последнему множителю и первым интегралам. Функциональная связь между последними множителями и базисными первыми интегралами.

Определение 1. Функцию $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$ назовём **последним множителем** на области X системы (∂) , если

$$\mathfrak{L}_j \mu(x) = -\mu(x) \operatorname{div} \mathfrak{L}_j(x), \quad \forall x \in X, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Установим аналитические связи между последними множителями и первыми интегралами.

Свойство 1 (свойство Якоби). Если μ_1 и μ_2 есть последние множители на области X системы (∂) , то функция

$$J: x \rightarrow \frac{\mu_1(x)}{\mu_2(x)}, \quad \forall x \in X'_2, \quad X'_2 \subset X, \quad (2)$$

является первым интегралом на области X'_2 системы (∂) , при этом область X'_2 устанавливается так, чтобы последний множитель $\mu_2(x) \neq 0, \forall x \in X'_2$.

Доказательство непосредственно следует из определений первого интеграла и последнего множителя системы (∂) :

$$\mathfrak{L}_j J = \frac{\mu_2 \mathfrak{L}_j \mu_1 - \mu_1 \mathfrak{L}_j \mu_2}{\mu_2^2} = \frac{-\mu_2 \mu_1 \operatorname{div} \mathfrak{L}_j + \mu_1 \mu_2 \operatorname{div} \mathfrak{L}_j}{\mu_2^2} \equiv 0. \blacksquare$$

Предложение 1. Если функция μ_2 является последним множителем на области X , а функции (4.1.3) — первыми интегралами на области X' системы (∂) , то функция

$$\mu_1: x \rightarrow \mu_2(x) \Phi(F(x)), \quad \forall x \in X',$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_k(x))$, Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, будет последним множителем на области \mathcal{X}' этой системы.

Доказательство. Предложение 1 предполагает выполнение условий теоремы 1.1.3, по которой

$$\mathfrak{L}_j \Phi(F(x)) = 0, \forall x \in \mathcal{X}', j = \overline{1, m}.$$

Тогда на области \mathcal{X}'

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_j \mu_1 &= \Phi(F) \mathfrak{L}_j \mu_2 + \mu_2 \mathfrak{L}_j \Phi(F) = \\ &= -\Phi(F) \mu_2 \operatorname{div} \mathfrak{L}_j = -\mu_1 \operatorname{div} \mathfrak{L}_j. \blacksquare \end{aligned}$$

Предложение 1 является достаточным условием следующего критерия.

Теорема 1. Если функция μ_2 является последним множителем на области \mathcal{X} системы (∂) , а функции (4.1.3) образуют базис первых интегралов на области \mathcal{X}' этой системы, то функция μ_1 будет последним множителем на подобласти \mathcal{X}'' области \mathcal{X}' системы (∂) тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\mu_1(x) = \mu_2(x) \Phi(F(x)), \forall x \in \mathcal{X}'',$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_k(x))$, Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Необходимость. Если μ_1 и μ_2 — последние множители системы (∂) , то, по свойству 1, функция (2) будет первым интегралом на подобласти \mathcal{X}_2' области \mathcal{X} системы (∂) .

Функции (4.1.3) образуют интегральный базис на области \mathcal{X}' системы (∂) . Поэтому согласно определению 2.1.3 скалярная функция (2) на области $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}_2' \cap \mathcal{X}'$ представима в виде

$$J(x) \equiv \frac{\mu_1(x)}{\mu_2(x)} = \Phi(F(x)), \forall x \in \mathcal{X}''. \blacksquare$$

Отсюда с учётом теоремы 1.5.3 получаем

Следствие 1. Если функция μ_2 есть последний множитель на области X системы (∂) с дефектом r , $0 \leq r \leq n - m$, то функция μ_1 будет последним множителем на подобласти X'' области X' этой системы тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\mu_1(x) = \mu_2(x)\Phi(F(x)), \quad \forall x \in X'',$$

где координатные функции F_τ , $\tau = \overline{1, n - m - r}$, вектора-функции F суть функционально независимые первые интегралы на области X' системы (∂) , Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Свойство 2. Функция μ является последним множителем на области X системы (∂) тогда и только тогда, когда векторные поля

$$v^j(x) = \mu(x)u^j(x), \quad \forall x \in X, \quad j = \overline{1, m},$$

где $u^j(x) = (u_{j1}(x), \dots, u_{jn}(x))$, $\forall x \in X$, $j = \overline{1, m}$, являются соленоидальными на области X .

Действительно, функция μ будет последним множителем на области X системы (∂) , если и только если

$$\mathfrak{L}_j \mu(x) = -\mu(x) \operatorname{div} u^j(x), \quad \forall x \in X, \quad j = \overline{1, m}.$$

При этом на области X у векторных полей v^j , $j = \overline{1, m}$, расходимости

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v^j &= \operatorname{div} (\mu u^j) = u^j \cdot \operatorname{grad} \mu + \mu \operatorname{div} u^j = \\ &= \mathfrak{L}_j \mu + \mu \operatorname{div} u^j = -\mu \operatorname{div} u^j + \mu \operatorname{div} u^j \equiv 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 3. Если функция μ является последним множителем на области X неполной системы (∂) , то она будет последним множителем и полной системы, индуцированной системой (∂) .

Доказательство. С учётом правила (4.3.3) приведения неполной системы (∂) к полной системе достаточно доказать следующее утверждение.

Если на области \mathcal{X}

$$\mathfrak{L}_\xi \mu(x) = -\mu(x) \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi(x) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_\zeta \mu(x) = -\mu(x) \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta(x),$$

то

$$[\mathfrak{L}_\xi, \mathfrak{L}_\zeta] \mu(x) = -\mu(x) \operatorname{div} [\mathfrak{L}_\xi(x), \mathfrak{L}_\zeta(x)], \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (3)$$

Действительно, в каждой точке x области \mathcal{X}

$$\begin{aligned} [\mathfrak{L}_\xi, \mathfrak{L}_\zeta] \mu &= \mathfrak{L}_\xi \mathfrak{L}_\zeta \mu - \mathfrak{L}_\zeta \mathfrak{L}_\xi \mu = -\mathfrak{L}_\xi (\mu \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta) + \mathfrak{L}_\zeta (\mu \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi) = \\ &= -\mathfrak{L}_\xi \mu \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta - \mu \mathfrak{L}_\xi \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta + \mathfrak{L}_\zeta \mu \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi + \mu \mathfrak{L}_\zeta \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi = \\ &= \mu \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta - \mu \mathfrak{L}_\xi \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta - \mu \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi + \mu \mathfrak{L}_\zeta \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi = \\ &= -\mu (\mathfrak{L}_\xi \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta - \mathfrak{L}_\zeta \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi). \end{aligned}$$

Отсюда с учётом формулы

$$\operatorname{div} [\mathfrak{L}_\xi(x), \mathfrak{L}_\zeta(x)] = \mathfrak{L}_\xi \operatorname{div} \mathfrak{L}_\zeta(x) - \mathfrak{L}_\zeta \operatorname{div} \mathfrak{L}_\xi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

получаем тождество (3). ■

2. $(n - k)$ -цилиндричные последние множители линейной однородной системы в частных производных

$(n - k)$ -цилиндричный последний множитель системы (∂) . Необходимый признак существования $(n - k)$ -цилиндричных последних множителей. Критерий существования $(n - k)$ -цилиндричного последнего множителя. Построение функционально независимых $(n - k)$ -цилиндричных последних множителей.

Сохраняя подход и обозначения, принятые в пункте 1 параграфа 7, а также считая, как и ранее, что матрица u и рассматриваемые функции являются непрерывно дифференцируемыми достаточное число раз, введём следующее понятие.

Определение 1. Последний множитель μ системы (∂) назовём $(n - k)$ -цилиндричным, если функция μ зависит только от k , $0 \leq k \leq n$, переменных x_1, \dots, x_n .

Согласно определениям 1.1 и 1 система (∂) имеет $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель

$$\mu: x \rightarrow \mu(kx), \forall x \in X', X' \subset X, \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда на X' выполняется система тождеств

$$\mathfrak{L}_{jk}\mu(kx) + \mu(kx) \operatorname{div} u^j(x) = 0, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где векторы-функции

$$u^j: x \rightarrow (u_{j1}(x), \dots, u_{jn}(x)), \forall x \in X, j = \overline{1, m}.$$

Методом, аналогичным методу доказательства теоремы 1.1.7, доказываем необходимый признак существования $(n - k)$ -цилиндричного последнего множителя системы (∂) .

Теорема 1. Для того чтобы система (∂) имела на области X' $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель (1), необходимо выполнение на области X системы тождеств

$$W_{x_p}(k u^j(x), \operatorname{div} u^j(x)) = 0, j = \overline{1, m}, p = \overline{k + 1, n}. \quad (3)$$

Пусть матрица u удовлетворяет условиям (3).

Составим функциональную систему

$$\begin{aligned} {}^k\varphi {}^k u^j(x) &= -\operatorname{div} u^j(x), \\ {}^k\varphi \partial_p^\xi {}^k u^j(x) &= -\partial_p^\xi \operatorname{div} u^j(x), \end{aligned} \quad (4)$$

$$j = \overline{1, m}, p = \overline{k + 1, n}, \xi = \overline{1, k - 1}.$$

Теорема 2 (критерий существования $(n - k)$ -цилиндричного последнего множителя). Для того чтобы система (∂) имела $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель (1), необходимо и достаточно существования такого вектора-функции

${}^k\varphi$, удовлетворяющего функциональной системе (4), что составленное на его основании уравнение Пфаффа (5.1.7) является точным на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$. При этом последний множитель (1) системы (∂) будет иметь вид

$$\mu: x \rightarrow \exp \int {}^k\varphi({}^kx) d{}^kx, \forall x \in \mathcal{X}'. \quad (5)$$

Доказательство. Необходимость. Если система (∂) имеет последний множитель (1), то выполняется система тождеств (2):

$$\sum_{\tau=1}^k u_{j\tau}(x) \partial_{\tau} \mu({}^kx) + \mu({}^kx) \operatorname{div} u^j(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}', j = \overline{1, m}.$$

Выполнив почленное деление каждого тождества на $\mu({}^kx)$, получим на подобласти \mathcal{X}'_0 области \mathcal{X}' новую систему тождеств

$$\sum_{\tau=1}^k u_{j\tau}(x) \partial_{\tau} \ln \mu({}^kx) + \operatorname{div} u^j(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}'_0, j = \overline{1, m}.$$

Дифференцируя эти тождества $k-1$ раз по x_{k+1}, \dots, x_n , убеждаемся, что решением системы (4) является продолжение на область \mathcal{X}'_0 вектора-функции

$${}^k\varphi: {}^kx \rightarrow (\partial_1 \ln \mu({}^kx), \dots, \partial_k \ln \mu({}^kx)), \forall {}^kx \in \tilde{\mathcal{X}}_0^k. \quad (6)$$

Уравнение Пфаффа (5.1.7), составленное на основании функции (6), является точным на области $\tilde{\mathcal{X}}_0^k$.

Из задания (6) следует, что $(n-k)$ -цилиндричный последний множитель μ системы (∂) строится на области \mathcal{X}'_0 на основании решений системы (4) по формуле (5).

Сужая область \mathcal{X}' до её подобласти \mathcal{X}'_0 , получаем утверждение теоремы 2 в части необходимости.

Достаточность. Пусть функция ${}^k\varphi$ является решением функциональной системы (4), а уравнение Пфаффа (5.1.7), составленное на её основании, является точным на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$.

Тогда имеют место тождества

$$\partial_\tau \int^k \varphi({}^k x) d^k x = \varphi_\tau({}^k x), \quad \forall {}^k x \in \widetilde{\mathcal{X}}^k, \quad \tau = \overline{1, k}.$$

Учитывая, что функция ${}^k \varphi$ является решением функциональной системы (4), получаем, что относительно функции (5) выполняется система тождеств (2).

Следовательно, функция (5) является $(n - k)$ -цилиндричным последним множителем системы (∂) . ■

Пример 1. Для линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1(x)y &\equiv x_1 x_2 \partial_1 y + x_1 x_3 \partial_2 y + x_1 x_4 \partial_3 y + x_2^2 \partial_4 y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(x)y &\equiv x_1 x_3 \partial_1 y + x_1 x_4 \partial_2 y + x_1^2 \partial_3 y + x_2^2 \partial_4 y = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

найдем 3-цилиндричный последний множитель вида

$$\mu: x \rightarrow \mu(x_1), \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}' \subset \mathbb{R}^4. \quad (8)$$

Расходимости на \mathbb{R}^4

$$\operatorname{div} u^1(x) \equiv \operatorname{div} \mathfrak{L}_1(x) = \partial_1(x_1 x_2) + \partial_2(x_1 x_3) + \partial_3(x_1 x_4) + \partial_4 x_2^2 = x_2,$$

$$\operatorname{div} u^2(x) \equiv \operatorname{div} \mathfrak{L}_2(x) = \partial_1(x_1 x_3) + \partial_2(x_1 x_4) + \partial_3 x_1^2 + \partial_4 x_2^2 = x_3.$$

У совокупностей

$$\{x_1 x_2, x_2\} \quad \text{и} \quad \{x_1 x_3, x_3\}$$

вронскианы по x_2, x_3 и x_4 на \mathbb{R}^4 равны нулю:

$$W_{x_2}(x_1 x_2, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_2 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_{x_3}(x_1 x_2, x_2) = W_{x_4}(x_1 x_2, x_2) = 0;$$

$$W_{x_2}(x_1 x_3, x_3) = 0, \quad W_{x_3}(x_1 x_3, x_3) = \begin{vmatrix} x_1 x_3 & x_3 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_{x_4}(x_1 x_3, x_3) = 0.$$

Значит, выполняются необходимые условия (теорема 1) существования у системы (7) 3-цилиндричного последнего множителя вида (8).

Составим функциональную систему

$$x_1 x_2 \varphi_1 = -x_2, \quad x_1 x_3 \varphi_1 = -x_3, \quad x_1 \varphi_1 = -1,$$

из которой находим

$$\varphi_1: x \rightarrow -\frac{1}{x_1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{x: x_1 \neq 0\}.$$

Поскольку

$$\exp \int \frac{dx_1}{-x_1} = \frac{C}{|x_1|}, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (C > 0),$$

то 3-цилиндричным последним множителем системы (7) согласно теореме 2 будет, например, функция

$$\mu: x \rightarrow -\frac{1}{x_1}, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}' \subset \{x: x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Предложенный в теореме 2 метод может быть использован для построения функционально независимых последних множителей системы (∂) .

Теорема 3. Пусть система (4) имеет q не являющихся линейно связанными на области \mathcal{X}' решений (10.1.7), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (11.1.7) являются точными на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$. Тогда $(n-k)$ -цилиндричные последние множители системы (∂)

$$\mu_\gamma: x \rightarrow \exp \int^k \varphi^\gamma({}^k x) d^k x, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \gamma = \overline{1, q},$$

функционально независимы на области \mathcal{X}' .

Доказательство. То, что последние множители μ_γ , $\gamma = \overline{1, q}$, системы (∂) имеют указанные виды, следует из теоремы 2.

Из представлений

$$\partial_\tau \ln \mu_\gamma({}^k x) = \varphi_\tau^\gamma({}^k x), \quad \forall {}^k x \in \tilde{\mathcal{X}}^k, \quad \tau = \overline{1, k}, \quad \gamma = \overline{1, q},$$

следует, что матрица Якоби

$$J(\ln \mu_\gamma({}^k x); {}^k x) = \|\varphi_\tau^\gamma({}^k x)\|_{q \times k}, \quad \forall {}^k x \in \tilde{\mathcal{X}}^k.$$

Так как решения (10.1.7) функциональной системы (4) не являются линейно связанными на \mathcal{X}' , то ранг матрицы Якоби

$$\text{rank } J(\ln \mu_\gamma({}^k x); {}^k x) = q$$

почти везде на области $\tilde{\mathcal{X}}^k$.

Стало быть, $(n-k)$ -цилиндричные последние множители μ_γ , $\gamma = \overline{1, q}$, системы (∂) функционально независимы на \mathcal{X}' . ■

3. Последний множитель системы уравнений в полных дифференциалах

Последний множитель системы (CD). Свойство Якоби последних множителей. Построение последних множителей по последнему множителю и первым интегралам. Функциональная связь между последними множителями и базисными первыми интегралами.

Определение 1. Функцию $\mu: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ назовём **последним множителем** на области \mathcal{D} системы (CD), если

$$\mathfrak{X}_j \mu(t, x) = -\mu(t, x) \operatorname{div} \mathfrak{X}_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Установим аналитические связи между последними множителями и первыми интегралами.

Свойство 1 (свойство Якоби). Если μ_1 и μ_2 есть последние множители на области \mathcal{D} системы (CD), то функция

$$J: (t, x) \rightarrow \frac{\mu_1(t, x)}{\mu_2(t, x)}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'_2, \quad \mathcal{D}'_2 \subset \mathcal{D}, \quad (2)$$

является первым интегралом на области \mathcal{D}'_2 системы (CD), при этом область \mathcal{D}'_2 устанавливается так, чтобы последний множитель $\mu_2(t, x) \neq 0$, $\forall (t, x) \in \mathcal{D}'_2$.

Доказательство свойства Якоби для системы (CD) аналогично доказательству свойства Якоби (свойство 1.1) для системы (∂).

Предложение 1. *Если функция μ_2 является последним множителем на области \mathcal{D} , а скалярные функции (1.2.2) — первыми интегралами на области \mathcal{D}' системы (CD), то функция*

$$\mu_1: (t, x) \rightarrow \mu_2(t, x)\Phi(F(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

где $F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_k(t, x))$, Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, будет последним множителем на области \mathcal{D}' этой системы.

Доказательство. Предложение 1 предполагает выполнение условий теоремы 1.2.2, по которой

$$\mathfrak{X}_j \Phi(F(t, x)) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad j = \overline{1, m},$$

и на области \mathcal{D}'

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_j \mu_1 &= \Phi(F) \mathfrak{X}_j \mu_2 + \mu_2 \mathfrak{X}_j \Phi(F) = \\ &= -\mu_2 \Phi(F) \operatorname{div} \mathfrak{X}_j = -\mu_1 \operatorname{div} \mathfrak{X}_j. \blacksquare \end{aligned}$$

Предложение 1 является достаточным условием критерия.

Теорема 1. *Если функция μ_2 является последним множителем на области \mathcal{D} системы (CD), а функции (1.2.2) образуют базис первых интегралов на области \mathcal{D}' этой системы, то функция μ_1 будет последним множителем на подобласти \mathcal{D}'' области \mathcal{D}' системы (CD) тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\mu_1(t, x) = \mu_2(t, x)\Phi(F(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'',$$

где $F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_k(t, x))$, Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Необходимость. Если μ_1 и μ_2 — последние множители системы (CD), то, по свойству Якоби последних множителей, функция (2) является первым интегралом на подобласти \mathcal{D}'_2 области \mathcal{D} системы (CD).

Функции (1.2.2) образуют базис первых интегралов на области \mathcal{D}' системы (CD).

Тогда скалярная функция (2) на области $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}'_2 \cap \mathcal{D}'$ представима в виде

$$J(t, x) = \Phi(F(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}''. \blacksquare$$

Отсюда с учётом теоремы 1.3.2 получаем

Следствие 1. Если функция μ_2 есть последний множитель на области \mathcal{D} голоморфной системы (ICD), то функция μ_1 будет последним множителем на подобласти \mathcal{D}'' области \mathcal{D}' этой системы тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\mu_1(t, x) = \mu_2(t, x)\Phi(F(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'',$$

где координаты-функции $F_i, i = \overline{1, n}$, суть функционально независимые первые интегралы на области \mathcal{D}' системы (ICD), Φ — некоторая голоморфная функция.

Свойство 2. Функция μ является последним множителем на области \mathcal{D} системы (CD) тогда и только тогда, когда векторные поля

$$u^j(t, x) = \mu(t, x)b^j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j = \overline{1, m},$$

где $b^j(t, x) = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{mj}, X_{1j}(t, x), \dots, X_{nj}(t, x)), \forall (t, x) \in \mathcal{D}, j = \overline{1, m}$, ($\delta_{\zeta j}$ — символ Кронекера), являются соленоидальными на области \mathcal{D} .

Действительно, μ — последний множитель системы (CD) тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{X}_j \mu(t, x) = -\mu(t, x) \operatorname{div} b^j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j = \overline{1, m}.$$

При этом на области \mathcal{D} у векторных полей $u^j, j = \overline{1, m}$, расходимости

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu b^j) &= b^j \cdot \operatorname{grad} \mu + \mu \operatorname{div} b^j = \mathfrak{X}_j \mu + \mu \operatorname{div} b^j = \\ &= -\mu \operatorname{div} b^j + \mu \operatorname{div} b^j \equiv 0. \blacksquare \end{aligned}$$

4. s -неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные последние множители системы в полных дифференциалах

s -неавтономный последний множитель системы (CD). $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель системы (CD). Необходимый признак существования s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных последних множителей. Критерий существования s -неавтономного $(n - k)$ -цилиндричного последнего множителя. Построение функционально независимых s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных последних множителей.

Сохраняя подход и обозначения, принятые в пунктах 2 и 3 параграфа 7, а также считая, что матрица X и рассматриваемые функции являются непрерывно дифференцируемыми достаточно число раз, введём следующие понятия.

Определение 1. Последний множитель μ системы (CD) назовём **s -неавтономным**, если функция μ зависит от x и только от s , $0 \leq s \leq m$, независимых переменных t_1, \dots, t_m . При $s = 0$ последний множитель

$$\mu: x \rightarrow \mu(x), \forall x \in X', X' \subset X,$$

системы (CD) назовём **автономным**.

Определение 2. Последний множитель μ системы (CD) назовём **$(n - k)$ -цилиндричным**, если функция μ зависит от t и только от k , $0 \leq k \leq n$, зависимых переменных x_1, \dots, x_n .

Система (CD) имеет s -неавтономный $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель

$$\mu: (t, x) \rightarrow \mu({}^s t, {}^k x), \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}, \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда на \mathcal{D}' выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{jsk} \mu({}^s t, {}^k x) + \mu({}^s t, {}^k x) \operatorname{div}_x X^j(t, x) = 0, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где векторы-функции

$$X^j: (t, x) \rightarrow (X_{1j}(t, x), \dots, X_{nj}(t, x)), \forall (t, x) \in \mathcal{D}, j = \overline{1, m}.$$

Методом, аналогичным методу доказательства теоремы 1.3.7, доказываем *необходимый признак существования s -неавтономного $(n - k)$ -цилиндричного последнего множителя.*

Теорема 1. *Для того чтобы система (CD) имела s -неавтономный $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель (1), необходимо выполнение на области \mathcal{D} системы тождеств*

$$\begin{aligned} W_{t_\zeta}(1, {}^kX^\theta(t, x), \operatorname{div}_x X^\theta(t, x)) &= 0, \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \zeta = \overline{s + 1, m}, \\ W_{t_\zeta}({}^kX^\nu(t, x), \operatorname{div}_x X^\nu(t, x)) &= 0, \quad \nu = \overline{s + 1, m}, \quad \zeta = \overline{s + 1, m}, \\ W_{x_p}(1, {}^kX^\theta(t, x), \operatorname{div}_x X^\theta(t, x)) &= 0, \quad \theta = \overline{1, s}, \quad p = \overline{k + 1, n}, \\ W_{x_p}({}^kX^\nu(t, x), \operatorname{div}_x X^\nu(t, x)) &= 0, \quad \nu = \overline{s + 1, m}, \quad p = \overline{k + 1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть матрица X удовлетворяет условиям (3).

Составим функциональную систему

$$\begin{aligned} \psi_\theta + {}^k\varphi {}^kX^\theta(t, x) &= -\operatorname{div}_x X^\theta(t, x), \\ {}^k\varphi \partial_{t_\zeta}^\xi {}^kX^\theta(t, x) &= -\partial_{t_\zeta}^\xi \operatorname{div}_x X^\theta(t, x), \quad \xi = \overline{1, k + 1}, \\ {}^k\varphi \partial_{x_p}^\xi {}^kX^\theta(t, x) &= -\partial_{x_p}^\xi \operatorname{div}_x X^\theta(t, x), \quad \xi = \overline{1, k + 1}, \\ {}^k\varphi {}^kX^\nu(t, x) &= -\operatorname{div}_x X^\nu(t, x), \\ {}^k\varphi \partial_{t_\zeta}^\xi {}^kX^\nu(t, x) &= -\partial_{t_\zeta}^\xi \operatorname{div}_x X^\nu(t, x), \quad \xi = \overline{1, k}, \\ {}^k\varphi \partial_{x_p}^\xi {}^kX^\nu(t, x) &= -\partial_{x_p}^\xi \operatorname{div}_x X^\nu(t, x), \quad \xi = \overline{1, k}, \\ \theta &= \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{s + 1, m}, \quad \zeta = \overline{s + 1, m}, \quad p = \overline{k + 1, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2 (критерий существования s -неавтономного $(n - k)$ -цилиндричного последнего множителя). *Для того чтобы система (CD) имела s -неавтономный $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель (1), необходимо и достаточно*

существования таких векторов-функций ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе (4), что составленное на их основании уравнение Пфаффа (5.3.7) является точным на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$. При этом последний множитель (1) системы (CD) будет иметь вид

$$\mu: (t, x) \rightarrow \exp g({}^st, {}^kx), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad (5)$$

где при любых $({}^st, {}^kx)$ из области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$

$$g({}^st, {}^kx) = \int {}^s\psi({}^st, {}^kx) d{}^st + {}^k\varphi({}^st, {}^kx) d{}^kx. \quad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Если система (CD) имеет последний множитель (1), то выполняется система тождеств

$$\partial_{t_\theta} \mu({}^st, {}^kx) + \sum_{\tau=1}^k X_{\tau\theta}(t, x) \partial_{x_\tau} \mu({}^st, {}^kx) + \mu({}^st, {}^kx) \operatorname{div}_x X^\theta(t, x) = 0,$$

$$\sum_{\tau=1}^k X_{\tau\nu}(t, x) \partial_{x_\tau} \mu({}^st, {}^kx) + \mu({}^st, {}^kx) \operatorname{div}_x X^\nu(t, x) = 0,$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{s+1, m}.$$

Выполнив почленное деление каждого тождества на $\mu({}^st, {}^kx)$, получим новую систему тождеств

$$\partial_{t_\theta} \ln \mu({}^st, {}^kx) + \sum_{\tau=1}^k X_{\tau\theta}(t, x) \partial_{x_\tau} \ln \mu({}^st, {}^kx) + \operatorname{div}_x X^\theta(t, x) = 0,$$

$$\sum_{\tau=1}^k X_{\tau\nu}(t, x) \partial_{x_\tau} \ln \mu({}^st, {}^kx) + \operatorname{div}_x X^\nu(t, x) = 0,$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D}'_0, \quad \mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}', \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{s+1, m}.$$

Дифференцируя первые s тождеств k раз по t_{s+1}, \dots, t_m и k раз по x_{k+1}, \dots, x_n , а остальные $m - s$ тождеств $k - 1$ раз по t_{s+1}, \dots, t_m и $k - 1$ раз по x_{k+1}, \dots, x_n , убеждаемся, что решением системы (4) являются продолжения на область \mathcal{D}'_0 функций

$$\begin{aligned} {}^s\psi: ({}^st, {}^kx) &\rightarrow \partial_{{}^st} \ln \mu({}^st, {}^kx), \quad \forall ({}^st, {}^kx) \in \tilde{\mathcal{D}}_0^{s+k}, \\ {}^k\varphi: ({}^st, {}^kx) &\rightarrow \partial_{{}^kx} \ln \mu({}^st, {}^kx), \quad \forall ({}^st, {}^kx) \in \tilde{\mathcal{D}}_0^{s+k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение Пфаффа (5.3.7), составленное на основании функций (7), является точным на области $\tilde{\mathcal{D}}_0^{s+k}$.

Из задания (7) следует, что s -неавтономный $(n - k)$ -цилиндричный последний множитель μ системы (CD) строится на области \mathcal{D}'_0 на основании решений функциональной системы (4) по формуле (5) при (6).

Сужая область \mathcal{D}' до её подобласти \mathcal{D}'_0 , получаем утверждение теоремы 2 в части необходимости.

Достаточность. Пусть функции ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$ являются решением функциональной системы (4), а уравнение Пфаффа (5.3.7), составленное на их основании, является точным на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$.

Тогда на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$

$$\partial_{{}^st} g({}^st, {}^kx) = {}^s\psi({}^st, {}^kx), \quad \partial_{{}^kx} g({}^st, {}^kx) = {}^k\varphi({}^st, {}^kx).$$

Учитывая, что функции ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$ являются решением функциональной системы (4), получаем, что относительно функции (5) при (6) выполняется система тождеств (2).

Стало быть, функция (5) при (6) является s -неавтономным $(n - k)$ -цилиндричным последним множителем системы (CD). ■

Этот метод может быть использован для построения функционально независимых последних множителей системы (CD).

Теорема 3. Пусть система (4) имеет q не являющихся линейно связанными на области \mathcal{D}' решений (7.3.7), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (8.3.7) являются точными на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+k}$. Тогда s -неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные последние множители системы (CD)

$$\mu_\gamma: (t, x) \rightarrow \exp \int^s \psi^\gamma(st, {}^kx) d^s t + {}^k \varphi^\gamma(st, {}^kx) d^k x, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

где $\gamma = \overline{1, q}$, функционально независимы на области \mathcal{D}' .

Доказательство. То, что последние множители μ_γ , $\gamma = \overline{1, q}$, системы (CD) имеют указанные виды, следует из теоремы 2.

Из представлений

$$\partial_{t_\theta} \ln \mu_\gamma(st, {}^kx) = \psi_\theta^\gamma(st, {}^kx), \quad \partial_{x_\xi} \ln \mu_\gamma(st, {}^kx) = \varphi_\xi^\gamma(st, {}^kx),$$

$$\gamma = \overline{1, q}, \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad \forall (st, {}^kx) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k},$$

следует, что матрица Якоби

$$J(\ln \mu_\gamma(st, {}^kx); st, {}^kx) = \|\Psi(st, {}^kx) \Phi(st, {}^kx)\|_{q \times (s+k)}$$

состоит из $(q \times s)$ -матрицы

$$\Psi(st, {}^kx) = \|\psi_\theta^\gamma(st, {}^kx)\|, \quad \forall (st, {}^kx) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k},$$

и $(q \times k)$ -матрицы

$$\Phi(st, {}^kx) = \|\varphi_\xi^\gamma(st, {}^kx)\|, \quad \forall (st, {}^kx) \in \widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}.$$

Так как решения (7.3.7) функциональной системы (4) не являются линейно связанными на области \mathcal{D}' , то ранг матрицы Якоби

$$\text{rank } J(\ln \mu_\gamma(st, {}^kx); st, {}^kx) = q$$

почти везде на области $\widetilde{\mathcal{D}}^{s+k}$.

Поэтому s -неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные последние множители μ_γ , $\gamma = \overline{1, q}$, системы (CD) функционально независимы на области \mathcal{D}' . ■

§ 9. Первые интегралы и последние множители систем с симметриями

1. Построение первых интегралов и последнего множителя системы (∂) по допускаемым операторам

Допускаемые операторы полной системы (∂) . Построение по допускаемым операторам первых интегралов и последнего множителя полной системы (∂) .

Линейную однородную систему уравнений в частных производных (∂) будем рассматривать в случае, когда она является полной на области \mathcal{X} пространства \mathbb{R}^n .

Определение 1. Будем говорить, что полная система (∂) допускает линейный дифференциальный оператор \mathfrak{M} на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} , если скобки Пуассона

$$[\mathfrak{M}(x), \mathfrak{L}_j(x)] = \sum_{s=1}^m B_{js}(x) \mathfrak{L}_s(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad j = \overline{1, m},$$

где функции-коэффициенты $B_{js}: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$, $j, s = \overline{1, m}$, непрерывно дифференцируемы.

По допускаемым и индуцированным полной системой (∂) линейным дифференциальным операторам можно построить в явном виде последний множитель этой системы.

Теорема 1. Пусть полная система (∂) допускает $n - m$ линейных дифференциальных операторов

$$\mathfrak{M}_k(x) = \sum_{i=1}^n v_{ki}(x) \partial_i, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad k = \overline{1, n - m},$$

которые в совокупности с индуцированными системой (∂) операторами \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$, не являются линейно связанными на области \mathcal{X}' . Тогда полная система (∂) на подобласти \mathcal{X}'' области \mathcal{X}' имеет последний множитель

$$\mu: x \rightarrow \det^{-1} M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}), \quad \forall x \in \mathcal{X}'', \quad (1)$$

где элементы блочной матрицы $M = \|u_v\|_{n \times n}$ есть матрицы

$$u(x) = \|u_{ji}(x)\|_{m \times n}, \forall x \in \mathcal{X}, \quad v(x) = \|v_{ki}(x)\|_{(n-m) \times n}, \forall x \in \mathcal{X}',$$

составленные из координат дифференциальных операторов $\mathfrak{L}_j, j = \overline{1, m}$, и $\mathfrak{M}_k, k = \overline{1, n-m}$, соответственно.

Доказательство. Для k не являющихся линейно связанными на области Ω пространства \mathbb{R}^k линейных дифференциальных операторов первого порядка $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$ на области Ω имеет место тождество [22]

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 \det M(\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k) &= \operatorname{div} \mathfrak{B}_1 \det M(\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k) + \\ &+ \det M(\mathfrak{B}_1, [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2], \mathfrak{B}_3, \dots, \mathfrak{B}_k) + \\ &+ \dots + \det M(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{k-1}, [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_k]). \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, при любом $j \in \{1, \dots, m\}$ на области \mathcal{X}'

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_j \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) &= \\ = \operatorname{div} \mathfrak{L}_j \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) &+ \\ + \sum_{l=1}^m (1 - \delta_{lj}) \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l], \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) &+ \\ + \sum_{k=1}^{n-m} \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{M}_k], \dots, \mathfrak{M}_{n-m}), \end{aligned} \quad (3)$$

где δ_{lj} — символ Кронекера.

Поскольку система (∂) является полной на области \mathcal{X} , то имеют место представления (1.2.3).

Стало быть, на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} определители

$$\begin{aligned} \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_l], \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) &= 0, \\ j, l = \overline{1, m}, \quad l \neq j. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно определению 1 для допускаемых системой (∂) линейных дифференциальных операторов \mathfrak{M}_k , $k = \overline{1, n-m}$, на области \mathcal{X}' имеет место система тождеств

$$[\mathfrak{M}_k(x), \mathfrak{L}_j(x)] = \sum_{s=1}^m B_{kjs}(x) \mathfrak{L}_s(x), \quad k = \overline{1, n-m}, \quad j = \overline{1, m},$$

где функции $B_{kjs}: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n-m}$, $j, s = \overline{1, m}$, непрерывно дифференцируемы.

Значит, на области \mathcal{X}' определители

$$\det M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, [\mathfrak{L}_j, \mathfrak{M}_k], \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) = 0, \quad (5)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n-m}.$$

Из системы тождеств (3) на основании тождеств (4) и (5) получаем, что на области \mathcal{X}'

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_j \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) = \\ & = \operatorname{div} \mathfrak{L}_j \det M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Следовательно, на подобласти \mathcal{X}'' области \mathcal{X}'

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_j \det^{-1} M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) = \\ & = -\det^{-1} M(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}) \operatorname{div} \mathfrak{L}_j, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Согласно определению 1.1.8 функция (1) является последним множителем системы (∂) . ■

Когда операторы \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$, и \mathfrak{M}_k , $k = \overline{1, n-m}$, в совокупности линейно связаны, построить последний множитель, используя теорему 1, не представляется возможным.

Однако в этом случае [121, с. 106 – 107] имеет место (аналогичная закономерность для неполных линейных однородных систем уравнений в частных производных доказана в [46])

Предложение 1. Пусть полная система (∂) на подобласти \mathcal{X}' области \mathcal{X} допускает линейные дифференциальные

операторы первого порядка \mathfrak{M}_τ , $\tau = \overline{1, p+1}$, причём операторы \mathfrak{M}_τ , $\tau = \overline{1, p}$, и \mathfrak{L}_j , $j = \overline{1, m}$, в совокупности не являются линейно связанными на области \mathcal{X}' , а оператор \mathfrak{M}_{p+1} представим в виде линейной комбинации

$$\mathfrak{M}_{p+1}(x) = \sum_{\tau=1}^p F_\tau(x) \mathfrak{M}_\tau(x) + \sum_{j=1}^m \Phi_j(x) \mathfrak{L}_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad (6)$$

с непрерывно дифференцируемыми на \mathcal{X}' функциями-коэффициентами F_τ , $\tau = \overline{1, p}$, и Φ_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда на \mathcal{X}' либо $F_\tau \equiv \text{const}$, либо функция

$$F_\tau: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau = \overline{1, p},$$

есть первый интеграл системы (∂) .

На основании теоремы 1 и предложения 1 получаем возможность построения первого интеграла или последнего множителя полной системы (∂) в случае, когда совокупность индуцированных и допускаемых полной системой (∂) дифференциальных операторов является линейно независимой и содержит совокупность не являющихся линейно связанными операторов.

Теорема 2. Пусть полная система (∂) допускает линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}$, которые в совокупности с линейными дифференциальными операторами $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m$ являются линейно независимыми на области \mathcal{X}' , а совокупность линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m$ и $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$ при $1 \leq p \leq n - m$ не является линейно связанной на области \mathcal{X}' . Тогда на основании операторов $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m$ и $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}$ всегда можно построить либо первый интеграл $F_\tau: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ из (6), либо последний множитель (1) полной системы (∂) .

Действительно, если $1 \leq p < n - m$, то с учётом линейной независимости совокупности дифференциальных операторов $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m$ и $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{n-m}$ на основании предложения 1 найдём первый интеграл F_τ , $\tau = \overline{1, p}$, полной системы (∂) .

Если же $p = n - m$, то, по теореме 1, строим последний множитель (1) этой системы. ■

Пример 1. Линейная однородная система уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_1(x)y \equiv x_1\partial_1y - x_2\partial_2y + x_3\partial_3y = 0, \quad (7)$$

$$\mathfrak{L}_2(x)y \equiv x_1\partial_1y + x_2\partial_2y + x_3\partial_3y = 0$$

является якобиевой на пространстве \mathbb{R}^3 , поскольку скобки Пуассона

$$[\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Стало быть, интегральный базис дифференциальной системы (7) состоит из $n - m = 3 - 2 = 1$ первого интеграла.

Почленно складывая и вычитая уравнения дифференциальной системы (7), приводим её к интегрально равносильной системе

$$x_1\partial_1y + x_3\partial_3y = 0, \quad \partial_2y = 0$$

с базисом первых интегралов

$$F: x \rightarrow \frac{x_3}{x_1}, \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad (8)$$

где \mathcal{X}' — любая область из множества $\{x: x_1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^3 .

Функция (8) является базисом первых интегралов на области \mathcal{X}' системы (7).

Рассмотрим возможность построения первого интеграла системы (7), используя допускаемые операторы этой системы и свойство Якоби последних множителей.

Поскольку линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{M}_1(x) = x_1\partial_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_2(x) = x_3\partial_1 + x_1\partial_3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

таковы, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{M}_1(x), \mathfrak{L}_1(x)] = [\mathfrak{M}_1(x), \mathfrak{L}_2(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

$$[\mathfrak{M}_2(x), \mathfrak{L}_1(x)] = [\mathfrak{M}_2(x), \mathfrak{L}_2(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

то система (7) допускает операторы \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 .

Определители

$$\det M(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{M}_1) = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2x_1x_2x_3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\det M(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{M}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{vmatrix} = 2x_2(x_1^2 - x_3^2), \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Согласно теореме 1 функции

$$\mu_1: x \rightarrow \frac{1}{-2x_1x_2x_3}, \forall x \in \mathcal{X}'_1, \mathcal{X}'_1 \subset \{x: x_1x_2x_3 \neq 0\},$$

и

$$\mu_2: x \rightarrow \frac{1}{2x_2(x_1^2 - x_3^2)}, \forall x \in \mathcal{X}'_2, \mathcal{X}'_2 \subset \{x: x_2 \neq 0, x_1^2 \neq x_3^2\},$$

являются последними множителями системы (7).

Тогда, по свойству Якоби (свойство 1.1.8) последних множителей, функция

$$\Phi: x \rightarrow \frac{x_3^2 - x_1^2}{x_1x_3}, \forall x \in \mathcal{X}'_3, \quad (9)$$

будет 1-цилиндричным первым интегралом на любой области \mathcal{X}'_3 из множества $\{x: x_1x_3 \neq 0\}$ системы (7).

Учитывая якобиевость системы (7), заключаем, что функция (9) составляет базис первых интегралов на области \mathcal{X}'_3 системы (7).

Отметим, что для первых интегралов (8) и (9) имеет место тождество

$$\Phi(x) = F(x) - \frac{1}{F(x)}, \forall x \in \mathcal{X}'_3,$$

выражающее функциональную неоднозначность первого интеграла.

2. Построение первых интегралов и последнего множителя системы (ICD) по допускаемым операторам

Допускаемые операторы системы (ICD). Построение по допускаемым операторам первых интегралов и последнего множителя дифференциальной системы (ICD).

Рассмотрим голоморфную вполне разрешимую на области \mathcal{D} систему уравнений в полных дифференциалах (ICD).

Определение 1. Будем говорить, что голоморфная система (ICD) **допускает линейный дифференциальный**

оператор \mathfrak{M} на подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} , если на \mathcal{D}' скобки Пуассона

$$[\mathfrak{M}(t, x), \mathfrak{X}_j(t, x)] = \sum_{k=1}^m B_{jk}(t, x) \mathfrak{X}_k(t, x), \quad j = \overline{1, m},$$

где функции $B_{jk}: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$, $j, k = \overline{1, m}$, голоморфны.

Наряду с операторами \mathfrak{X}_j , $j = \overline{1, m}$, для s -неавтономных систем (ICDs) на области \mathcal{D}^{s+n} из \mathbb{R}^{s+n} будем рассматривать s -неавтономные ($0 \leq s \leq m$) дифференциальные операторы

$$\mathfrak{X}_{\theta s}(^s t, x) = \partial_{t_\theta} + \sum_{i=1}^n X_{i\theta}(^s t, x) \partial_{x_i}, \quad \theta = \overline{1, s},$$

$$\mathfrak{X}_{\nu s}(^s t, x) = \sum_{i=1}^n X_{i\nu}(^s t, x) \partial_{x_i}, \quad \nu = \overline{s+1, m}.$$

Рассмотрим также на подобласти $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$ области \mathcal{D}^{s+n} дифференциальные операторы

$$\mathfrak{M}_{\zeta s}(^s t, x) = \sum_{\theta=1}^s f_{\theta\zeta}(^s t, x) \partial_{t_\theta} + \sum_{i=1}^n g_{i\zeta}(^s t, x) \partial_{x_i}, \quad \zeta = \overline{1, p},$$

где функции $f_{\theta\zeta}: \tilde{\mathcal{D}}^{s+n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g_{i\zeta}: \tilde{\mathcal{D}}^{s+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta = \overline{1, s}$, $i = \overline{1, n}$, $\zeta = \overline{1, p}$, голоморфны.

Теорема 1. Пусть система (ICDs) при $n \geq m - s$ допускает $p = n - m + s$ операторов $\mathfrak{M}_{\zeta s}$, $\zeta = \overline{1, p}$, которые совместно с m операторами \mathfrak{X}_{js} , $j = \overline{1, m}$, образуют совокупность из $n + s$ не являющихся голоморфно линейно связанными на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$ операторов. Тогда система (ICDs) на подобласти \mathcal{D}'' области \mathcal{D} имеет s -неавтономный последний множитель

$$\mu: (t, x) \rightarrow \det^{-1} M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}), \quad (1)$$

где блочная матрица $M = \begin{vmatrix} R & Y \\ F & G \end{vmatrix}$ с блоками: $(m \times s)$ -матрица R с элементами $r_{jj} = 1$ и $r_{ji} = 0$, $j \neq i$; $(m \times n)$ -матрица $Y = \|X_{ji}\|$; $(p \times s)$ -матрица $F = \|f_{ji}\|$ и $(p \times n)$ -матрица $G = \|g_{ji}\|$, причём всюду j — номер столбца, i — номер строки, область \mathcal{D}'' является областью голоморфности функции (1).

Доказательство. Согласно тождеству (2.1) на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$ при любом $j \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}) = \\ & = \operatorname{div} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}) + \\ & + \sum_{\gamma=1}^m (1 - \delta_{\gamma j}) \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, [\mathfrak{X}_{js}, \mathfrak{X}_{\gamma s}], \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}) + \\ & + \sum_{\zeta=1}^p \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, [\mathfrak{X}_{js}, \mathfrak{M}_{\zeta s}], \dots, \mathfrak{M}_{ps}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\delta_{\gamma j}$ — символ Кронекера.

Условия Фробениуса для системы (ICDs) примут вид

$$[\mathfrak{X}_{js}({}^s t, x), \mathfrak{X}_{\gamma s}({}^s t, x)] = \mathfrak{D}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad j, \gamma = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Так как система (ICDs) допускает дифференциальные операторы $\mathfrak{M}_{\zeta s}$, $\zeta = \overline{1, p}$, то согласно определению 1

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{X}_{js}({}^s t, x), \mathfrak{M}_{\zeta s}({}^s t, x)] = \sum_{\gamma=1}^m B_{j\zeta\gamma}({}^s t, x) \mathfrak{X}_{\gamma s}({}^s t, x), \\ & \forall ({}^s t, x) \in \tilde{\mathcal{D}}^{s+n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \zeta = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $B_{j\zeta\gamma}: \tilde{\mathcal{D}}^{s+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $j, \gamma = \overline{1, m}$, $\zeta = \overline{1, p}$, голоморфны.

Таким образом, из системы тождеств (2) на основании тождеств (3) и (4) получаем, что на области $\widehat{\mathcal{D}}^{s+n}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}) = \\ = \operatorname{div} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}). \end{aligned}$$

Отсюда с учётом определения 1.3.8 следует, что функция (1) является последним множителем системы (ICDs). ■

В случае, когда операторы \mathfrak{X}_{js} , $j = \overline{1, m}$, и $\mathfrak{M}_{\zeta s}$, $\zeta = \overline{1, p}$, в совокупности линейно связаны, построить последний множитель, используя теорему 1, не представляется возможным.

Однако в этом случае имеет место

Предложение 1. Пусть система (ICD) допускает голоморфные на области \mathcal{D}' линейные дифференциальные операторы первого порядка \mathfrak{M}_{τ} , $\tau = \overline{1, p+1}$, причём индуцированные системой (ICD) операторы \mathfrak{X}_j , $j = \overline{1, m}$, и операторы \mathfrak{M}_{ζ} , $\zeta = \overline{1, p}$, в совокупности не являются голоморфно линейно связанными на области \mathcal{D}' , а оператор \mathfrak{M}_{p+1} представим на \mathcal{D}' в виде линейной комбинации

$$\mathfrak{M}_{p+1}(t, x) = \sum_{\zeta=1}^p F_{\zeta}(t, x) \mathfrak{M}_{\zeta}(t, x) + \sum_{j=1}^m \Phi_j(t, x) \mathfrak{X}_j(t, x) \quad (5)$$

с голоморфными на \mathcal{D}' коэффициентами F_{ζ} , $\zeta = \overline{1, p}$, и Φ_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда на \mathcal{D}' либо $F_{\zeta} \equiv \operatorname{const}$, либо функция

$$F_{\zeta}: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta = \overline{1, p},$$

есть первый интеграл системы (ICD).

На основании теоремы 1 и предложения 1 можно построить первый интеграл или последний множитель системы (ICD) в следующем случае.

Следствие 1. Пусть система (ICDs) при $n \geq m - s$ допускает $p = n - m + s$ операторов $\mathfrak{M}_{\zeta s}$, $\zeta = \overline{1, p}$, которые в совокупности с m операторами \mathfrak{X}_{js} , $j = \overline{1, m}$, являются

ся линейно независимыми на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$, а совокупность дифференциальных операторов $\{\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}, \mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{\theta s}\}$ при $1 \leq \theta \leq p$ не является голоморфно линейно связанной на $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$. Тогда на основании линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{ms}$ и $\mathfrak{M}_{1s}, \dots, \mathfrak{M}_{ps}$ всегда можно построить либо первый интеграл $F_\zeta: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ из (5), либо последний множитель (1) системы (ICDs).

Пример 1. Рассмотрим автономную вполне разрешимую линейную однородную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^m A_j x dt_j \equiv X(x) dt, \quad j = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad (6)$$

где $A_j, j = \overline{1, m}$, есть квадратные матрицы порядка n над полем \mathbb{R} , когда у матрицы $X \in \mathbb{M}^{n, m}$ ранг

$$\text{rank } X(x) = m$$

почти везде на пространстве \mathbb{R}^n .

Система (6) вполне разрешима на \mathbb{R}^{m+n} , если и только если матрицы $A_j, j = \overline{1, m}$, попарно перестановочны:

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \quad j, \zeta = \overline{1, m}.$$

Это равносильно тому, что линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{X}_j(x) = A_j x \partial_x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

попарно перестановочны, т.е. скобки Пуассона

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{X}_\zeta(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j, \zeta = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим матрицы $A_\tau \in \mathbb{M}^{n, n}$, $\tau = \overline{m+1, n}$, такие, что

$$A_i A_\xi = A_\xi A_i, \quad i, \xi = \overline{1, n},$$

а операторы

$$\mathfrak{X}_i(x) = A_i x \partial_x, \quad i = \overline{1, n},$$

не являются голоморфно линейно связанными на \mathbb{R}^n .

Тогда скобки Пуассона

$$[\mathfrak{X}_i(x), \mathfrak{X}_\xi(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i, \xi = \overline{1, n},$$

а значит, система (6) допускает операторы \mathfrak{X}_τ , $\tau = \overline{m+1, n}$.

Следовательно, по теореме 1, у системы (6) существует автономный последний множитель

$$\mu: (t, x) \rightarrow \det^{-1} M(\mathfrak{X}_1(x), \dots, \mathfrak{X}_n(x)), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим систему (ICDs), когда ранг

$$\text{rank}_s X({}^s t, x) = n < m - s$$

для всех точек $({}^s t, x)$ из области \mathcal{D}^{s+n} , за исключением, быть может, множества точек $(s+n)$ -мерной меры нуль.

В этом случае, не умаляя общности, можем считать, что операторы \mathfrak{X}_{js} , $j = \overline{s+1, s+n}$, не являются голоморфно линейно связанными на области \mathcal{D}^{s+n} .

Тогда на области \mathcal{D}^{s+n}

$$\mathfrak{X}_{\gamma s}({}^s t, x) = \sum_{j=s+1}^{s+n} \alpha_{j\gamma}({}^s t, x) \mathfrak{X}_{js}({}^s t, x), \quad \gamma = \overline{s+n+1, m}.$$

Отсюда с учётом условий (3) приходим к выводу: если голоморфные функции $\alpha_{j\gamma}({}^s t, x) \not\equiv \text{const}$, то они являются первыми интегралами на области \mathcal{D}^{s+n} вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{s+n} X_{ij}({}^s t, x) dt_j, \quad i = \overline{1, n},$$

типа (ICDs). А это противоречит теореме 1.2.7, согласно которой указанная система не имеет s -неавтономных первых интегралов.

Поэтому все $\alpha_{j\gamma}$, $j = \overline{s+1, s+n}$, $\gamma = \overline{s+n+1, m}$, должны быть тождественными постоянными на области \mathcal{D}^{s+n} .

Следовательно, операторы $\mathfrak{X}_{\gamma s}$, $\gamma = \overline{s+n+1, m}$, линейно зависят от операторов \mathfrak{X}_{js} , $j = \overline{s+1, s+n}$.

В силу этого на области \mathcal{D}

$$\begin{aligned} d \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s})|_{(\text{ICDs})} &= \\ &= \sum_{j=1}^{s+n} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}) dt_j + \\ &+ \sum_{\gamma=s+n+1}^m \sum_{j=s+1}^{s+n} \alpha_{j\gamma} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}) dt_{\gamma}. \end{aligned}$$

С учётом системы тождеств (2) на области \mathcal{D}^{s+n} имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}) &= \operatorname{div} \mathfrak{X}_{js} \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}) + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{s+n} (1 - \delta_{\gamma j}) \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, [\mathfrak{X}_{js}, \mathfrak{X}_{\gamma s}], \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}), \quad j = \overline{1, s+n}. \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условий (4) на области \mathcal{D} имеет место тождество

$$\begin{aligned} d \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s})|_{(\text{ICDs})} &= \\ &= \det M(\mathfrak{X}_{1s}, \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}) \sum_{j=1}^m \operatorname{div} \mathfrak{X}_{js} dt_j, \end{aligned}$$

из которого следует, что функция

$$\mu: (t, x) \rightarrow \det^{-1} M(\mathfrak{X}_{1s}(^s t, x), \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}(^s t, x)) \quad (7)$$

на подобласти \mathcal{D}' области \mathcal{D} является s -неавтономным последним множителем системы (ICDs).

Тем самым доказана

Теорема 2. Система (ICDs), когда ранг $\text{rank}_s X(^st, x) = n$, $n \leq m - s$, для всех точек $(^st, x)$ из области \mathcal{D}^{s+n} , за исключением, быть может, множества точек $(s+n)$ -мерной меры нуль, имеет последний множитель (7).

Очевидным следствием теоремы 2 является

Следствие 2. Система (ICDs) в случае, когда функции

$$X_{ij} : (^st, x) \rightarrow X_{ij}(^st, x), \quad \forall (^st, x) \in \mathcal{T}^s \times \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

суть полиномы относительно x с голоморфными на области $\mathcal{T}^s \subset \mathbb{R}^s$ коэффициентами по st , при $\text{rank}_s X(^st, x) = n$, $n \leq m - s$ для всех $(^st, x)$ из области $\mathcal{T}^s \times \mathbb{R}^n$, за исключением, быть может, множества точек $(s+n)$ -мерной меры нуль, имеет s -неавтономный последний множитель в виде рациональной функции по x с голоморфными коэффициентами по st вида (7).

Пример 2. Автономная система [1, с. 49]

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2 + x_2^2) dt_1 - 2x_1 x_2 dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1 x_2 dt_1 + (x_1^2 - x_2^2) dt_2 \end{aligned} \tag{8}$$

является вполне разрешимой на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, так как на \mathbb{R}^2

$$[\mathfrak{x}_1(x), \mathfrak{x}_2(x)] = [(-x_1^2 + x_2^2)\partial_1 - 2x_1 x_2 \partial_2, -2x_1 x_2 \partial_1 + (x_1^2 - x_2^2)\partial_2] = \mathfrak{O}.$$

Для системы (8) числа $s = 0$, $n = m = 2$.

У матрицы X системы (8) ранг

$$\text{rank } X(x) = n = m - s = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Определитель

$$\det M(\mathfrak{x}_1(x), \mathfrak{x}_2(x)) = \det X(x) = -(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Согласно следствию 2 автономным последним множителем системы (8) будет рациональная функция

$$\mu : (t, x) \rightarrow -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где \mathcal{X} — любая область из множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

На основании следствия 1 при $s = t$ и теоремы 2 с учётом свойства Якоби последних множителей (свойство 1.3.8) заключаем, что имеет место

Следствие 3. *Если система (ICDs) при выполнении условий теоремы 2 допускает n голоморфных на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$ дифференциальных операторов $\mathfrak{M}_{\zeta m}$, $\zeta = \overline{1, n}$, которые в совокупности с m операторами \mathfrak{X}_{js} , $j = \overline{1, m}$, являются линейно независимыми на области $\tilde{\mathcal{D}}^{s+n}$, то на основании этих $n + m$ операторов всегда можно построить первый интеграл системы (ICDs).*

Из теоремы 2 с учётом определения 1.3.8 (последнего множителя) следует

Следствие 4. *У системы (IACD) в случае, когда функции X_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, суть полиномы по x , при условии $\text{rank } X(x) = n \leq m$ для всех x из \mathbb{R}^n , за исключением, быть может, множества точек n -мерной меры нуль, существует последний множитель, с сужением отличным от*

$$\mu: (st, x) \rightarrow K \det^{-1} M(\mathfrak{X}_{1s}(st, x), \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}(st, x)), \quad (9)$$

$$\forall (st, x) \in \tilde{\mathcal{D}}^{s+n}, \tilde{\mathcal{D}}^{s+n} \subset \mathcal{D}^{s+n}, K = \text{const},$$

или первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow Y(t, x) \det^{-1} M(\mathfrak{X}_{1s}(st, x), \dots, \mathfrak{X}_{s+n,s}(st, x))$$

на области \mathcal{D}'' из \mathbb{R}^{m+n} , где Y есть голоморфная на \mathcal{D}'' функция.

В силу предложения 2.0.4 и теоремы 2 с учётом свойства Якоби последних множителей (свойство 1.3.8) получаем следующее утверждение.

Следствие 5. *У системы (ICDs) при выполнении условий теоремы 2 все последние множители, отличные от (9), не являются s -неавтономными по st .*

Теорема 3. *Если система (IACD) имеет первый интеграл*

$$F: (t, x) \rightarrow H(x) \exp(Jt), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', \quad (10)$$

где $H: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, голоморфная на области \mathcal{X}' из \mathbb{R}^n , $J = (J_1, \dots, J_m)$, $J_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, и допускает голоморфный на области \mathcal{X}' линейный дифференциальный оператор первого порядка \mathfrak{M}_0 такой, что

$$\mathfrak{M}_0 H(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{X}',$$

то система (IACD) имеет автономный первый интеграл

$$\Phi: x \rightarrow H^{-1}(x) \mathfrak{M}_0 H(x), \forall x \in \mathcal{X}'. \quad (11)$$

Доказательство. Так как функция (10) является первым интегралом системы (IACD), то имеет место система тождеств

$$\mathfrak{X}_{j0}(H(x) \exp(Jt)) = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}',$$

из которой получаем

$$\mathfrak{X}_{j0} H(x) = -J_j H(x), \forall x \in \mathcal{X}', j = \overline{1, m}. \quad (12)$$

Поскольку система (IACD) допускает линейный дифференциальный оператор \mathfrak{M}_0 , то из (4) (с учётом того, что на пространстве голоморфных функций скобки Пуассона дифференциальных операторов совпадают с их коммутатором) имеем, что

$$\mathfrak{X}_{j0}(x) \mathfrak{M}_0(x) = \mathfrak{M}_0(x) \mathfrak{X}_{j0}(x), \forall x \in \mathcal{X}', j = \overline{1, m}.$$

Поэтому из системы тождеств (12) следуют тождества

$$\mathfrak{X}_{j0} \mathfrak{M}_0 H(x) = -J_j \mathfrak{M}_0 H(x), \forall x \in \mathcal{X}', j = \overline{1, m},$$

на основании которых и (12) получаем, что

$$\mathfrak{X}_{j0}(H^{-1}(x) \mathfrak{M}_0 H(x)) = 0, \forall x \in \mathcal{X}'', \mathcal{X}'' \subset \mathcal{X}', j = \overline{1, m}.$$

Значит, функция (11) является автономным первым интегралом системы (IACD). ■

Подобным образом доказываем следующее утверждение.

Теорема 4. Если дифференциальная система (IACD) имеет последний множитель

$$\mu: (t, x) \rightarrow H(x) \exp(Jt), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}',$$

где функция $H: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ голоморфна на области \mathcal{X}' пространства \mathbb{R}^n , $J = (J_1, \dots, J_m)$, $J_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, и допускает голоморфный на области \mathcal{X}' линейный дифференциальный оператор первого порядка \mathfrak{M}_0 такой, что на области \mathcal{X}' выполняются соотношения

$$\mathfrak{M}_0 H(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_0 \operatorname{div} \mathfrak{X}_{j_0}(x) \neq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

то система (IACD) на подобласти \mathcal{X}'' области \mathcal{X}' имеет автономный первый интеграл (11).

3. Обратная задача группового анализа

Построение всего множества систем (IACD) по инфинитезимальным операторам, универсальному инварианту и структурным константам допускаемой q -параметрической группы Ли. Модификация обратной задачи на случай, когда многопараметрическая группа Ли является абелевой.

Поставим задачу построения всего множества систем (IACD), когда известны не только операторы, допускаемые системой (IACD), но и то, что эти операторы являются инфинитезимальными q -параметрической группы Ли.

Пусть система (IACD) допускает q -параметрическую группу преобразований G_q , $1 \leq q \leq n$, с $(n - k)$ -цилиндричными инфинитезимальными операторами

$$\mathfrak{G}_l(x) = \sum_{i=1}^n g_{li}({}^k x) \partial_{x_i}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, q}, \quad (1)$$

и базисом абсолютных инвариантов

$$I(x) = (I_1(x), \dots, I_{n-q}(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (2)$$

У инфинитезимальных операторов (1) продолжения координатных функций g_{li} , $l = \overline{1, q}$, $i = \overline{1, n}$, голоморфны на области \mathcal{X} , и у базиса (2) абсолютные инварианты $I_\tau: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \overline{1, n - q}$, голоморфны на области \mathcal{X} .

На области \mathcal{X} инфинитезимальные операторы (1) не являются голоморфно линейно связанными [98, с. 113 – 114].

Ввиду автономности скобки Пуассона

$$[\mathfrak{G}_l(x), \mathfrak{x}_j(x)] = \mathfrak{D}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где операторы \mathfrak{x}_j , $j = \overline{1, m}$, есть автономные операторы дифференцирования (1.2.7) в силу системы (ACD).

Кроме того, у группы G_q скобки Пуассона

$$[\mathfrak{G}_l(x), \mathfrak{G}_s(x)] = \sum_{p=1}^q c_{lsp} \mathfrak{G}_p(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l, s = \overline{1, q}, \quad (4)$$

где c_{lsp} , $l, s, p = \overline{1, q}$, есть структурные константы q -параметрической группы Ли G_q [98, с. 176].

Лемма 1. *Полная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных*

$$\mathfrak{G}_l(x)y = 0, \quad l = \overline{1, q}, \quad q < n, \quad (5)$$

построенная на основании не являющихся голоморфно линейно связанными на области \mathcal{X} операторов \mathfrak{G}_l , $l = \overline{1, q}$, допускает $(n - q)$ -параметрическую абелеву группу Ли \tilde{G}_{n-q} , причём инфинитезимальные операторы группы \tilde{G}_{n-q} перестановочны с операторами \mathfrak{G}_l , $l = \overline{1, q}$, а в совокупности не являются голоморфно линейно связанными на \mathcal{X} .

Доказательство (для линейного дифференциального уравнения в частных производных аналогичное утверждение доказано в [121, с. 109]). Система (5), будучи полной, имеет базис из $n - q$ первых интегралов (свойство 1.5.3)

$$F_\xi: x \rightarrow F_\xi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \xi = \overline{1, n - q}.$$

Тогда подстановкой

$$v_\xi = F_\xi(x), \quad \xi = \overline{1, n-q}, \quad v_\zeta = \Phi_\zeta(x), \quad \zeta = \overline{n-q+1, n},$$

где функции Φ_ζ , $\zeta = \overline{n-q+1, n}$, есть первые интегралы соответственно полных линейных неоднородных систем уравнений в частных производных [55, с. 101]

$$\mathfrak{G}_l(x)y = \delta_{l, \zeta-n+q}, \quad l = \overline{1, q}, \quad \zeta = \overline{n-q+1, n},$$

(δ_{ls} — символ Кронекера), систему (5) приводим к полной линейной однородной системе уравнений в частных производных

$$\partial_{v_\zeta} y = 0, \quad \zeta = \overline{n-q+1, n}.$$

Эта система допускает $n-q$ операторов ∂_{v_ξ} , $\xi = \overline{1, n-q}$, которые, не будучи голоморфно линейно связанными на \mathbb{R}^{n-q} , определяют $(n-q)$ -параметрическую абелеву группу Ли.

Поэтому и система (5) допускает $(n-q)$ -параметрическую абелеву группу Ли \tilde{G}_{n-q} .

Поскольку операторы ∂_{v_i} , $i = \overline{1, n}$, перестановочны и не являются голоморфно линейно связанными, то, ввиду сохранения симметричности скобок Пуассона и отсутствия голоморфной линейной связности операторов при выполненном преобразовании, заключаем, что операторы абелевой группы Ли \tilde{G}_{n-q} перестановочны с операторами \mathfrak{G}_l , $l = \overline{1, q}$, а в совокупности не являются голоморфно линейно связанными на области \mathcal{X} . ■

На основании операторов (1), допускаемых системой (IACD), построим $(n-k)$ -цилиндричную систему

$$\mathfrak{G}_l(x)y = 0, \quad l = \overline{1, q}, \quad q \leq n, \quad (6)$$

которая в силу условий (4) является полной на области \mathcal{X} , с первыми интегралами $y: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

В соответствии с леммой 1 система (6) допускает $(n-q)$ -параметрическую абелеву группу \tilde{G}_{n-q} .

Пусть

$$\mathfrak{G}_l(x) = \sum_{i=1}^n g_{li}(x) \partial_{x_i}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{q+1, n},$$

есть инфинитезимальные операторы группы \tilde{G}_{n-q} .

По лемме 1, скобки Пуассона

$$[\mathfrak{G}_i(x), \mathfrak{G}_\tau(x)] = \mathfrak{D}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tau = \overline{q+1, n}, \quad (7)$$

причём операторы $\mathfrak{G}_i, i = \overline{1, n}$, не являются голоморфно линейно связанными на области \mathcal{X} .

Операторы $\mathfrak{G}_i, i = \overline{1, n}$, возьмём в качестве базиса, в котором каждый из операторов $\mathfrak{x}_j, j = \overline{1, m}$, индуцированных системой (IACD), имеет разложение

$$\mathfrak{x}_j(x) = \sum_{i=1}^n \psi_{ji}(x) \mathfrak{G}_i(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где $\psi_{ji}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ есть голоморфные функции на области \mathcal{X} .

Используя разложения (8), с учётом соотношений (4) и (7) получаем необходимые и достаточные условия того, что система (IACD) допускает группу Ли G_q :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{G}_l(x), \mathfrak{x}_j(x)] &= \sum_{i=1}^n \mathfrak{G}_l \psi_{ji}(x) \mathfrak{G}_i(x) + \sum_{i=1}^q \sum_{p=1}^q c_{lpi} \psi_{jp}(x) \mathfrak{G}_i(x), \\ &\forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

На основании (3) и базисности операторов $\mathfrak{G}_i, i = \overline{1, n}$, отсюда получаем, что на области \mathcal{X}

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_l \psi_{j\theta}(x) + \sum_{p=1}^q c_{lp\theta} \psi_{jp}(x) &= 0, \quad l = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \theta = \overline{1, q}, \\ \mathfrak{G}_l \psi_{j\tau}(x) &= 0, \quad l = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \tau = \overline{q+1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из системы тождеств (9) следует, что функции

$$\psi_{j\tau}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \tau = \overline{q+1, n},$$

есть абсолютные инварианты группы Ли G_q , и поэтому

$$\psi_{j\tau}(x) = \varphi_{j\tau}(I(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \tau = \overline{q+1, n},$$

где функции $\varphi_{j\tau}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $\tau = \overline{q+1, n}$, голоморфны на области Λ из \mathbb{R}^{n-q} .

Из системы тождеств (9) следует и то, что функции

$$\psi_{j\theta}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \theta = \overline{1, q},$$

являются первыми интегралами линейной неоднородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$\mathfrak{G}_l(x)\psi_{j\theta} + \sum_{p=1}^q c_{lp\theta}\psi_{jp} = 0, \quad l = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \theta = \overline{1, q}. \quad (10)$$

В соответствии с (4) и (7) система (10) полная на области \mathcal{X} . Пусть её первыми интегралами будут

$$\psi_{jl}: x \rightarrow \psi_{jl}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, q}.$$

В итоге на области \mathcal{X} приходим к представлению

$$\mathfrak{x}_j(x) = \sum_{l=1}^q \psi_{jl}(x)\mathfrak{G}_l(x) + \sum_{\tau=q+1}^n \varphi_{j\tau}(I(x))\mathfrak{G}_\tau(x), \quad j = \overline{1, m},$$

и следующему результату.

Теорема 1. Для того чтобы система (IACD) допускала q -параметрическую группу Ли G_q с $(n-k)$ -цилиндричными инфинитезимальными операторами (1), универсальным инвариантом (2) и структурными константами из представлений (4), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$dx_i = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^q \psi_{jl}(x) g_{li}^{(k)}(x) + \sum_{\tau=q+1}^n \varphi_{j\tau}(I(x)) g_{\tau i}(x) \right) dt_j, \quad (11)$$

$$i = \overline{1, n},$$

где функции $\psi_{jl}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, q}$, есть первые интегралы полной линейной неоднородной дифференциальной системы уравнений в частных производных (10), функции $g_{\tau i}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \overline{q+1, n}$, $i = \overline{1, n}$, — координаты инфинитезимальных операторов \mathfrak{G}_τ , $\tau = \overline{q+1, n}$, $(n-q)$ -параметрической абелевой группы Ли \tilde{G}_{n-q} , допускаемой $(n-k)$ -цилиндричной полной линейной однородной дифференциальной системой уравнений в частных производных (6), а функции $\varphi_{j\tau}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $\tau = \overline{q+1, n}$, голоморфны на области Λ пространства \mathbb{R}^{n-q} и такие, что выполняются условия полной разрешимости на области \mathcal{X} системы (11).

Пусть G_q — абелева группа Ли. Тогда в представлениях (4) структурные константы

$$c_{lsp} = 0, \quad l, s, p = \overline{1, q}.$$

При этом из системы тождеств (9) следует, что функции

$$\psi_{ji}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n},$$

есть абсолютные инварианты абелевой группы Ли G_q , и поэтому

$$\psi_{ji}(x) = \varphi_{ji}(I(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n},$$

где функции $\varphi_{ji}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, голоморфны на области Λ пространства \mathbb{R}^{n-q} .

Тогда на области \mathcal{X} приходим к представлению

$$\mathfrak{x}_j(x) = \sum_{l=1}^q \varphi_{jl}(I(x)) \mathfrak{G}_l(x) + \sum_{\tau=q+1}^n \varphi_{j\tau}(I(x)) \mathfrak{G}_\tau(x), \quad j = \overline{1, m},$$

и следующему результату.

Следствие 1. Для того чтобы система (IACD) допускала q -параметрическую абелеву группу Ли G_q с $(n - k)$ -цилиндричными инфинитезимальными операторами (1) и универсальным инвариантом (2), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$dx_i = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^q \varphi_{jl}(I(x)) g_{li}^{(k)}(x) + \sum_{\tau=q+1}^n \varphi_{j\tau}(I(x)) g_{\tau i}(x) \right) dt_j, \quad (12)$$

$$i = \overline{1, n},$$

где функции $g_{\tau i}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau = \overline{q+1, n}$, $i = \overline{1, n}$, есть координаты инфинитезимальных операторов \mathfrak{G}_τ , $\tau = \overline{q+1, n}$, $(n - q)$ -параметрической абелевой группы Ли \tilde{G}_{n-q} , допускаемой $(n - k)$ -цилиндричной полной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных (6), а функции $\varphi_{ji}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, голоморфны на области Λ из \mathbb{R}^{n-q} и такие, что выполняются условия полной разрешимости на области \mathcal{X} системы (12).

Пример 1. Рассмотрим q -параметрическую абелеву группу G_q преобразований

$$x_l \rightarrow e^{\alpha_l} x_l, \quad l = \overline{1, q}, \quad x_\tau \rightarrow x_\tau, \quad \tau = \overline{q+1, n}, \quad q < n, \quad (13)$$

с $(n - q)$ -цилиндричными инфинитезимальными операторами

$$\mathfrak{G}_l(x) = x_l \partial_{x_l}, \quad l = \overline{1, q},$$

и базисом абсолютных инвариантов

$$I(x) = (x_{q+1}, \dots, x_n).$$

Линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{G}_\tau(x) = x_\tau \partial_{x_\tau}, \quad \tau = \overline{q+1, n},$$

в совокупности с операторами \mathfrak{G}_l , $l = \overline{1, q}$, перестановочны и не являются голоморфно линейно связанными на пространстве \mathbb{R}^n .

Стало быть, по следствию 1, системы (IACD), допускающие абелеву группу G_q преобразований (13), будут иметь вид

$$dx_i = \sum_{j=1}^m x_i \varphi_{ji}(x_{q+1}, \dots, x_n) dt_j, \quad i = \overline{1, n},$$

где скалярные функции φ_{ji} , $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, голоморфные на области Λ из пространства \mathbb{R}^{n-q} , таковы, что выполняются условия Фробениуса

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n x_s \varphi_{ks}(x_{q+1}, \dots, x_n) \partial_{x_s} (x_i \varphi_{ji}(x_{q+1}, \dots, x_n)) = \\ & = \sum_{s=1}^n x_s \varphi_{js}(x_{q+1}, \dots, x_n) \partial_{x_s} (x_i \varphi_{ki}(x_{q+1}, \dots, x_n)), \\ & \forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n}, \quad j, k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Пример 2. Для однопараметрической группы Ли вращений

$$G_1: (x, y) \rightarrow (\cos a \, x - \sin a \, y, \sin a \, x + \cos a \, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \in \mathbb{R}),$$

на основании вычислений

$$\begin{aligned} \partial_a(\cos a \, x - \sin a \, y)|_{a=0} &= -y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_a(\sin a \, x + \cos a \, y)|_{a=0} &= x, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

составляем инфинитезимальный оператор

$$\mathfrak{G}_1(x, y) = -y \partial_x + x \partial_y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

По инфинитезимальному оператору \mathfrak{G}_1 составляем линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\mathfrak{G}_1(x, y) u = 0,$$

и находим его общий интеграл

$$I: (x, y) \rightarrow x^2 + y^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Значит, функция I будет абсолютным инвариантом группы G_1 .

С целью построения всего множества автономных обыкновенных дифференциальных систем второго порядка, допускающих однопараметрическую группу G_1 ,

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

с голоморфными на \mathbb{R}^2 правыми частями X и Y из коммутаторного тождества

$$[\mathfrak{G}_1(x, y), \mathfrak{G}(x, y)] = \mathfrak{D}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

находим, например, что

$$\mathfrak{G}(x, y) = x\partial_x + y\partial_y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

По координатам линейных дифференциальных операторов \mathfrak{G}_1 и \mathfrak{G} строим автономную обыкновенную дифференциальную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y\varphi_1(x^2 + y^2) + x\varphi_2(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x\varphi_1(x^2 + y^2) + y\varphi_2(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

где $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольные голоморфные на пространстве \mathbb{R} скалярные функции, которая допускает однопараметрическую группу вращений G_1 .

ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегральные многообразия

1. Интегральные гиперповерхности

Интегральные гиперповерхности системы уравнений в полных дифференциалах (CD). Критерий, по которому многообразие является интегральной гиперповерхностью вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах. Интегральные гиперповерхности, определяемые последними множителями.

Определение 1. *Многообразие*

$$\{(t, x): w(t, x) = 0\}, \quad (1)$$

*заданное с помощью непрерывно дифференцируемой на области \mathcal{D}' , $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, функции $w: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$, назовём **интегральной гиперповерхностью** системы уравнений в полных дифференциалах (CD), если производные Ли в силу системы (CD) функции w равны нулю на многообразии (1), то есть,*

$$\mathfrak{X}_j w(t, x) = \Phi_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

причём функции $\Phi_j: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, таковы, что

$$\Phi_j(t, x)|_{w(t, x)=0} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Дифференциал в силу системы (CD) функции w равен

$$dw(t, x)|_{(CD)} = \sum_{j=1}^m \partial_{t_j} w(t, x) dt_j + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} w(t, x) dx_i|_{(CD)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \partial_{t_j} w(t, x) dt_j + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} w(t, x) \sum_{j=1}^m X_{ij}(t, x) dt_j = \\
&= \sum_{j=1}^m \mathfrak{X}_j w(t, x) dt_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}'.
\end{aligned}$$

Поэтому система тождеств (2) при условиях (3) равносильна тому, что дифференциал функции w в силу системы (CD) тождественно равен нулю на $(m + n - 1)$ -мерном многообразии (1):

$$dw(t, x)|_{(CD)} = \Phi(t, x) dt, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad (4)$$

где функция

$$\Phi: (t, x) \rightarrow (\Phi_1(t, x), \dots, \Phi_m(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}',$$

удовлетворяет условиям (3).

Вполне очевидно (непосредственно следует из определения интегральной гиперповерхности (определение 1) и определения первого интеграла (определение 1.1.2.1) системы (CD)), что любая гиперповерхность

$$\{(t, x): F(t, x) - C = 0\},$$

где C — фиксированная вещественная постоянная, а F — первый интеграл системы (CD), является интегральной гиперповерхностью этой системы уравнений в полных дифференциалах. Но не всякая интегральная гиперповерхность входит в совокупность интегральных гиперповерхностей какого-либо первого интеграла. При этом существенное значение имеет условие полной разрешимости системы.

В случае, когда система (CD) не является вполне разрешимой, возможны ситуации наличия у неё интегральных гиперповерхностей при отсутствии первых интегралов.

Например, системы (4.0.4.1) и (7.0.4.1) не имеют ни решений, ни первых интегралов. При этом система (7.0.4.1) имеет две интегральные гиперповерхности $\{(t_1, t_2, x_1, x_2): x_1 = 0\}$ и $\{(t_1, t_2, x_1, x_2): x_2 = 0\}$.

Не вполне разрешимые системы (CD) с дискретным (конечным или бесконечным) числом интегральных гиперповерхностей или определяющие только изолированные интегральные гиперповерхности составляют особый класс дифференциальных систем со специальными методами их исследования.

В случае полной разрешимости из тождества (4) при условиях (3) следует критерий того, что многообразие (1) является интегральной гиперповерхностью системы (ICD) (доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.2.1).

Теорема 1. *Многообразие (1) является интегральной гиперповерхностью системы (ICD), если и только если функция w обращается в тождественный нуль вдоль любого решения системы (ICD).*

Обратим внимание на такую закономерность, которая непосредственно следует из определения последнего множителя (определение 1.3.8.1) и определения интегральной гиперповерхности (определение 1) системы (CD).

Предложение 1. *Если последний множитель $\mu: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ системы (CD) определяет многообразие*

$$\{(t, x): \mu(t, x) = 0\},$$

то оно является интегральной гиперповерхностью этой системы уравнений в полных дифференциалах.

Пусть $\mu: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ является последним множителем системы уравнений в полных дифференциалах (CD).

Тогда производные Ли

$$\mathfrak{X}_j \frac{1}{\mu(t, x)} = - \frac{1}{\mu^2(t, x)} \mathfrak{X}_j \mu(t, x) = \frac{1}{\mu(t, x)} \operatorname{div} \mathfrak{X}_j(t, x),$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D}'_0, j = \overline{1, m}, \mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}'.$$

Отсюда в соответствии с определением 1 заключаем, что имеет место

Предложение 2. *Если последний множитель $\mu: \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ системы уравнений в полных дифференциалах (CD) определяет многообразие*

$$\left\{ (t, x) : \frac{1}{\mu(t, x)} = 0 \right\},$$

то оно является интегральной гиперповерхностью системы уравнений в полных дифференциалах (CD).

2. *s*-неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные интегральные гиперповерхности

Автономные, *s*-неавтономные и $(n - k)$ -цилиндричные интегральные гиперповерхности. Необходимый признак существования *s*-неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных интегральных гиперповерхностей. Критерий существования *s*-неавтономной $(n - k)$ -цилиндричной интегральной гиперповерхности. Функционально независимые *s*-неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные интегральные гиперповерхности.

Сохраняя подход и обозначения, принятые в пунктах 2 и 3 параграфа 7 главы I, а также считая, что рассматриваемые функции являются непрерывно дифференцируемыми достаточное число раз, введём следующие понятия.

Определение 1. Интегральную гиперповерхность (1.1) системы уравнений в полных дифференциалах (CD) назовём ***s*-неавтономной**, если функция w зависит от x и только от s , $0 \leq s \leq t$, независимых переменных t_1, \dots, t_m . При $s = 0$ интегральную гиперповерхность

$$\{x : w(x) = 0\},$$

заданную функцией $w : X' \rightarrow \mathbb{R}$, где $X' \subset X$, системы (CD) назовём **автономной**.

Если функция w зависит от t и только от k , $0 \leq k \leq n$, зависимых переменных x_1, \dots, x_n , то интегральную гиперповерхность (1.1) системы (CD) назовём **$(n - k)$ -цилиндричной**.

Система (CD) имеет *s*-неавтономную $(n - k)$ -цилиндричную интегральную гиперповерхность

$$\{(t, x) : w({}^s t, {}^k x) = 0\} \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{j sk} w({}^s t, {}^k x) = \Phi_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}', \quad j = \overline{1, m}, \quad \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}, \quad (2)$$

при условиях

$$\Phi_j(t, x)|_{w({}^s t, {}^k x)=0} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Аналогичным методу доказательства теоремы 1.3.7.1 методом доказываем *необходимый признак существования s -неавтономной $(n - k)$ -цилиндричной интегральной гиперповерхности системы уравнений в полных дифференциалах.*

Теорема 1. *Для того чтобы система (CD) имела s -неавтономную $(n - k)$ -цилиндричную интегральную гиперповерхность (1), необходимо выполнение на области \mathcal{D} системы тождеств*

$$\begin{aligned} W_{t_\nu}(1, {}^k X^\theta(t, x)) &\equiv \Psi_{\theta\nu}^*(t, x), \quad \theta = \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \\ W_{t_\nu}({}^k X^j(t, x)) &\equiv \Psi_{j\nu}^*(t, x), \quad j = \overline{s+1, m}, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \\ W_{x_p}(1, {}^k X^\theta(t, x)) &\equiv \Psi_{\theta p}^{**}(t, x), \quad \theta = \overline{1, s}, \quad p = \overline{k+1, n}, \\ W_{x_p}({}^k X^\nu(t, x)) &\equiv \Psi_{\nu p}^{**}(t, x), \quad \nu = \overline{s+1, m}, \quad p = \overline{k+1, n}, \end{aligned} \quad (4)$$

где скалярные функции векторного аргумента $\Psi_{j\nu}^*: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Psi_{jp}^{**}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что

$$\begin{aligned} \Psi_{j\nu}^*(t, x)|_{w({}^s t, {}^k x)=0} &= 0, \quad \Psi_{jp}^{**}(t, x)|_{w({}^s t, {}^k x)=0} = 0, \\ j &= \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \quad p = \overline{k+1, n}. \end{aligned}$$

Пусть матрица X удовлетворяет условиям (4). Составим функциональную систему

$$\begin{aligned}
 \psi_\theta + {}^k\varphi {}^kX^\theta(t, x) &= H_\theta(t, x), \quad \theta = \overline{1, s}, \\
 {}^k\varphi \partial_{t_\nu}^\xi {}^kX^\theta(t, x) &= \partial_{t_\nu}^\xi H_\theta(t, x), \quad \xi = \overline{1, k}, \\
 {}^k\varphi \partial_{x_p}^\xi {}^kX^\theta(t, x) &= \partial_{x_p}^\xi H_\theta(t, x), \quad \xi = \overline{1, k}, \\
 {}^k\varphi {}^kX^\nu(t, x) &= H_\nu(t, x), \\
 {}^k\varphi \partial_{t_\zeta}^\xi {}^kX^\nu(t, x) &= \partial_{t_\zeta}^\xi H_\nu(t, x), \quad \xi = \overline{1, k-1}, \\
 {}^k\varphi \partial_{x_p}^\xi {}^kX^\nu(t, x) &= \partial_{x_p}^\xi H_\nu(t, x), \quad \xi = \overline{1, k-1}, \\
 \theta &= \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{s+1, m}, \quad p = \overline{k+1, n}, \quad \zeta = \overline{s+1, m},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где функции $H_j: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, таковы, что

$$H_j(t, x)|_{w(st, k_x)=0} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Система (4.4.8.1) есть частный случай системы (5), когда

$$H_j(t, x) \equiv -\operatorname{div}_x X^j(t, x).$$

Подобно теоремам 2.4.8.1 и 3.4.8.1 доказываем аналогичные утверждения относительно интегральных гиперповерхностей.

Теорема 2 (критерий существования s -неавтономной $(n-k)$ -цилиндричной интегральной гиперповерхности). Для того чтобы система (CD) имела s -неавтономную $(n-k)$ -цилиндричную интегральную гиперповерхность (1), необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^s\psi$ и ${}^k\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе (5), а также ска-

лярных функций H_j , $j = \overline{1, m}$, при условии (6), таких, что уравнение Пфаффа (5.3.7.1) имеет интегрирующий множитель, после умножения на который получаем точное уравнение Пфаффа с общим интегралом

$$w: ({}^st, {}^kx) \rightarrow w({}^st, {}^kx), \forall ({}^st, {}^kx) \in \mathcal{D}^{s+k}.$$

Теорема 3. Пусть h функциональных систем (5) имеют q не являющихся линейно связанными на области \mathcal{D} решений (7.3.7.1), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (8.3.7.1) имеют общий интеграл

$$w_\gamma: ({}^st, {}^kx) \rightarrow w_\gamma({}^st, {}^kx), \forall ({}^st, {}^kx) \in \mathcal{D}^{s+k}, \gamma = \overline{1, q}. \quad (7)$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области \mathcal{D}^{s+k} .

Общие интегралы (7) систем уравнений Пфаффа (8.3.7.1) определяют s -неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные интегральные гиперповерхности

$$\{(t, x): w_\gamma({}^st, {}^kx) = 0\}, \gamma = \overline{1, q}, \quad (8)$$

системы уравнений в полных дифференциалах (CD).

В этой связи теорема 3 указывает условия функциональной независимости на области \mathcal{D} s -неавтономных $(n - k)$ -цилиндричных интегральных гиперповерхностей (8) системы уравнений в полных дифференциалах (CD).

§ 2. Интегралы неавтономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах

1. Неавтономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

Система (PCD).

Систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = P(t, x) dt, \quad (\text{PCD})$$

где матрица $P(t, x) = \|P_{ij}(t, x)\|_{n \times m}$, $\forall (t, x) \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$, а её элементы $P_{ij}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, суть полиномы относительно зависимых переменных x с голоморфными на области \mathcal{T} по независимым переменным t коэффициентами, назовём *полиномиальной*.

Вполне разрешимую систему (PCD) обозначим (IPCD).

Относительно полиномов P_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, условимся, что степени по x полиномов P_{1j}, \dots, P_{nj} при каждом фиксированном j таковы, что $\deg_x P_{ij}(t, x) \leq p_j$ для всех $i = \overline{1, n}$ и хотя бы у одного из полиномов P_{1j}, \dots, P_{nj} степень по x равна p_j :

$$\max_{i=\overline{1, n}} \{\deg_x P_{ij}(t, x)\} = p_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \max_{j=\overline{1, m}} \{p_j\} = p.$$

Индукцированные системой (PCD) операторы

$$\mathfrak{P}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^n P_{ij}(t, x) \partial_{x_i}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

являются операторами дифференцирования в силу этой системы.

Основываясь на алгебраичности задания полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах, для неё введём специальные интегральные характеристики (интегральные инварианты), построенные на полиномиальной основе.

2. Полиномиальные частные интегралы

Полиномиальный частный интеграл. Интегральная гиперповерхность, определяемая полиномиальным частным интегралом. Произведение полиномиальных частных интегралов. Полиномиальные частные интегралы, определяемые последними множителями. Построение первого интеграла по полиномиальным частным интегралам в случае, когда производные Ли в силу системы (PCD) полиномиальных частных интегралов пропорциональны этим полиномиальным частным интегралам.

Определение 1. Скалярную функцию

$$w: (t, x) \rightarrow w(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \mathcal{P} = \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

являющуюся полиномом по x с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами, назовём **полиномиальным частным интегралом** системы (PCD), если производные Ли в силу системы (PCD) функции w равны

$$\mathfrak{P}_j w(t, x) = w(t, x) W_j(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где функции W_j — полиномы по x с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами.

Непосредственно по определениям интегральной гиперповерхности и полиномиального частного интеграла заключаем

Предложение 1. Если полиномиальный частный интеграл (1) системы (PCD) определяет многообразие

$$\{(t, x): w(t, x) = 0\}, \quad (3)$$

то оно будет интегральной гиперповерхностью этой полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах.

Пример 1. Полиномиальная 1-неавтономная система

$$dx_1 = \left(\frac{x_1}{t_1} + t_1 x_2 \right) dt_1 + t_1 x_2 dt_2,$$

$$dx_2 = \left(-1 - \frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2 \right) dt_1 + \left(-1 - \frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2 - x_2 x_3 \right) dt_2, \quad (4)$$

$$dx_3 = x_2 x_3 dt_1 + x_2 (x_2 + x_3) dt_2$$

имеет 1-неавтономный полиномиальный частный интеграл

$$w: (t, x) \rightarrow -1 + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2 + x_3^2, \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3, \mathcal{T} \subset \{(t_1, t_2): t_1 \neq 0\}.$$

А определяемое им многообразие

$$\{(t, x): x_1^2 + t_1^2 x_2^2 + t_1^2 x_3^2 - t_1^2 = 0\}$$

является 1-неавтономной интегральной гиперповерхностью системы (4).

Наряду с этим существуют полиномиальные частные интегралы (1), которые не обращаются в нуль¹ ни в одной точке области \mathcal{P} . Они не определяют многообразия (3), а значит, таким полиномиальным частным интегралом (1) системы (PCD) не соответствуют интегральные гиперповерхности.

Непосредственно вычислениями, основываясь на определениях используемых понятий, доказываем следующие свойства полиномиальных частных интегралов.

Свойство 1. У системы (PCD) всякий последний множитель μ , являющийся полиномом по x с голоморфными по t коэффициентами, будет полиномиальным частным интегралом этой системы.

Свойство 2. Пусть функция ν является полиномом по x с голоморфными по t коэффициентами, а построенная на её основании функция

$$\mu: (t, x) \rightarrow \frac{1}{\nu^k(t, x)}, \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P},$$

при некотором натуральном k является последним множителем системы (PCD). Тогда функция ν будет полиномиальным частным интегралом этой системы.

Свойство 3. Если функция w является полиномиальным частным интегралом системы (PCD), то и функция αw при любом числе $\alpha \neq 0$ будет полиномиальным частным интегралом этой системы.

Поэтому всякий раз, говоря о двух и более полиномиальных частных интегралах, будем считать их попарно линейно независимыми функциями.

¹Такая ситуация имеет место в ближайшем примере 2.

Свойство 4. Произведение $w_1 w_2$ полиномов w_1 и w_2 по x с голоморфными по t коэффициентами является полиномиальным частным интегралом системы (PCD), если и только если полиномы-сомножители w_1 и w_2 являются полиномиальными частными интегралами этой системы.

Свойство 5. Функция w является полиномиальным частным интегралом системы (PCD), тогда и только тогда, когда функция w^k , где k — любое натуральное число, будет полиномиальным частным интегралом этой системы.

Свойство 6. Пусть полиномиальные частные интегралы $w_1: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ системы (PCD) таковы, что

$$\mathfrak{P}_j w_1(t, x) = \lambda_1 W_j(t, x) w_1(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m},$$

и

$$\mathfrak{P}_j w_2(t, x) = \lambda_2 W_j(t, x) w_2(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow w_1^{h_1}(t, x) w_2^{h_2}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P},$$

где вещественные числа h_1 и h_2 находятся из уравнения $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 = 0$ при условии $|h_1| + |h_2| \neq 0$, является первым интегралом на области \mathcal{P}_0 системы (PCD).

Из свойства 6 вытекают следующие закономерности.

Свойство 7. Если скалярные функции w_1 и w_2 являются такими полиномиальными частными интегралами системы (PCD), что при $j = \overline{1, m}$ выполняются тождества

$$\mathfrak{P}_j w_1(t, x) \equiv w_1(t, x) W_j(t, x) \quad \text{и} \quad \mathfrak{P}_j w_2(t, x) \equiv w_2(t, x) W_j(t, x),$$

то функция $w_1 w_2^{-1}$ есть первый интеграл этой системы.

В этом случае зафиксирована ситуация, когда производные Ли в силу системы (PCD) полиномиальных частных интегралов пропорциональны этим полиномиальным частным интегралам:

$$\frac{\mathfrak{P}_j w_1(t, x)}{\mathfrak{P}_j w_2(t, x)} \equiv \frac{w_1(t, x)}{w_2(t, x)}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Свойство 8. Если скалярные функции w_1 и w_2 являются такими полиномиальными частными интегралами системы (PCD), что при $j = \overline{1, m}$ выполняются тождества

$$\mathfrak{P}_j w_1(t, x) \equiv w_1(t, x) W_j(t, x), \quad \mathfrak{P}_j w_2(t, x) \equiv -w_2(t, x) W_j(t, x),$$

то функция $w_1 w_2$ есть первый интеграл этой системы.

В данном случае зафиксирована ситуация, когда отношение производных Ли в силу системы (PCD) полиномиальных частных интегралов и отношение этих полиномиальных частных интегралов связаны тождествами:

$$\frac{\mathfrak{P}_j w_1(t, x)}{\mathfrak{P}_j w_2(t, x)} \equiv -\frac{w_1(t, x)}{w_2(t, x)}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Пример 2. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= (2x_2 z^2(x) - (1 + z(x))(2x_2 - x_1 z(x)))(dt_1 - dt_2), \\ dx_2 &= ((1 + z(x))(2x_1 + x_2 z(x)) - 2x_1 z^2(x))(dt_1 - dt_2), \\ dx_3 &= (z(x) + x_3^2 + (z(x) - x_3^2)^2)dt_1 + (z(x) + x_3^2 - (z(x) - x_3^2)^2)dt_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $z(x) = x_1^2 + x_2^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, такова, что на \mathbb{R}^5 в силу этой системы дифференциал полинома

$$w: (t, x) \rightarrow c + z(x),$$

где $c = \text{const}$, равен

$$d(c + z(x))|_{(5)} = 2(1 + z(x))z^2(x)(dt_1 - dt_2).$$

Поэтому в соответствии с определением 1 и свойством 4 полиномы

$$w_1: (t, x) \rightarrow 1 + z(x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^5, \quad \text{и} \quad w_2: (t, x) \rightarrow z(x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^5,$$

а также их произведения

$$w_1^{n_1} w_2^{n_2} : (t, x) \rightarrow (1 + z(x))^{n_1} z^{n_2}(x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^5,$$

где n_1, n_2 — целые неотрицательные числа, будут автономными 1-цилиндричными полиномиальными частными интегралами системы (5).

При этом автономный 1-цилиндричный полиномиальный частный интеграл w_1 не определяет интегральной гиперповерхности системы (5), а автономный 1-цилиндричный полиномиальный частный интеграл w_2 определяет 3-мерное многообразие $\{x: x_1 = x_2 = 0\}$, которое является автономной 1-цилиндричной интегральной гиперповерхностью дифференциальной системы (5).

3. Кратные полиномиальные частные интегралы

Кратные полиномиальные частные интегралы. Построение первых интегралов по двум полиномиальным частным интегралам с учётом их кратностей.

Определение 1. Полиномиальный частный интеграл (1.2) системы (PCD) имеет **кратность** $\varkappa = 1 + \sum_{\xi=1}^{\varepsilon} f_{\xi}$, если

существуют полиномы по x с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами $Q_{h_{\xi}g_{\xi}}$ и $R_{h_{\xi}g_{\xi}j}$, удовлетворяющие системе тождеств

$$\mathfrak{P}_j K_{h_{\xi}g_{\xi}}(t, x) = R_{h_{\xi}g_{\xi}j}(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

$$\xi = \overline{1, \varepsilon}, \quad h_{\xi} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi} = \overline{1, f_{\xi}}, \quad j = \overline{1, m},$$

где

$$K_{h_{\xi}g_{\xi}}(t, x) = \frac{Q_{h_{\xi}g_{\xi}}(t, x)}{w^{h_{\xi}}(t, x)}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P},$$

$w(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0$, причём каждый полином $Q_{h_{\xi}g_{\xi}}$ вза-

мно прост с w , а полиномы $R_{h_\xi g_\xi j}$ такие, что при $j = \overline{1, m}$

$$\max \left\{ \deg_x R_{h_\xi g_\xi j} : \xi = \overline{1, \varepsilon}, h_\xi \in \mathbb{N}, g_\xi = \overline{1, f_\xi} \right\} \leq p_j - 1.$$

Пример 1 (продолжение примера 2.2). Дифференциал

$$d \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \Big|_{(5.2)} = -2(1 + x_1^2 + x_2^2)(dt_1 - dt_2), \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

где область \mathcal{P}_0 из множества $\{(t, x) : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$.

Поэтому автономный 1-цилиндричный полиномиальный частный интеграл

$$w_2 : (t, x) \rightarrow x_1^2 + x_2^2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^5,$$

системы (5.2) будет двукратным.

На основании полиномиальных частных интегралов с учётом их кратностей строятся первые интегралы системы (PCD) в следующих случаях.

Свойство 1. Пусть система (PCD) имеет полиномиальный частный интеграл $w_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\mathfrak{P}_j w_1(t, x) = \lambda_1 W_{1j}(t, x) w_1(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}, j = \overline{1, m}, \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

и полиномиальный частный интеграл $w_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ кратности \varkappa_2 такой, что в тождествах

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_j K_{2h_{\xi_2} g_{\xi_2}}(t, x) &= R_{2h_{\xi_2} g_{\xi_2} j}(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, \\ \xi_2 &= \overline{1, \varepsilon_2}, h_{\xi_2} \in \mathbb{N}, g_{\xi_2} = \overline{1, f_{\xi_2}}, j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1)$$

при фиксированных h_{ξ_2} и g_{ξ_2} полиномы

$$R_{2h_{\xi_2} g_{\xi_2} j}(t, x) = \lambda_2 W_{1j}(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, j = \overline{1, m}, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow w_1^{\alpha_1}(t, x) \exp\left(\alpha_2 K_{2h_{\xi_2} g_{\xi_2}}(t, x)\right), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

где вещественные числа α_1 и α_2 находятся из уравнения

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0 \quad (2)$$

при условии $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, является первым интегралом на области \mathcal{P}_0 системы (PCD).

Свойство 2. Пусть полиномиальная система (PCD) имеет полиномиальный частный интеграл $w_1: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ кратности κ_1 такой, что

$$\mathfrak{P}_j K_{1h_{\xi_1} g_{\xi_1}}(t, x) = R_{1h_{\xi_1} g_{\xi_1} j}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

$$\xi_1 = \overline{1, \varepsilon_1}, \quad h_{\xi_1} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_1} = \overline{1, f_{\xi_1}}, \quad j = \overline{1, m},$$

и полиномиальный частный интеграл $w_2: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ кратности κ_2 такой, что в тождествах (1) при фиксированных h_{ξ_2} и g_{ξ_2} полиномы

$$R_{2h_{\xi_2} g_{\xi_2} j}(t, x) = -\lambda R_{1h_{\xi_1} g_{\xi_1} j}(t, x),$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

при фиксированных h_{ξ_1} и g_{ξ_1} . Тогда скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow \lambda K_{1h_{\xi_1} g_{\xi_1}}(t, x) + K_{2h_{\xi_2} g_{\xi_2}}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

является первым интегралом на области \mathcal{P}_0 полиномиальной системы (PCD).

4. Условные частные интегралы

Условный частный интеграл. Построение первых интегралов по полиномиальному частному интегралу с учётом его кратности и условно-му частному интегралу. Построение первых интегралов по двум условным частным интегралам.

Определение 1. Скалярную функцию

$$\omega: (t, x) \rightarrow \exp v(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m,$$

где

$$v: (t, x) \rightarrow v(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P},$$

есть полином по x с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами, назовём **условным частным интегралом** системы (PCD), если

$$\mathfrak{P}_j v(t, x) = S_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где S_j — полиномы по x с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами такие, что $\deg_x S_j(t, x) \leq p_j - 1$, $j = \overline{1, m}$.

Пример 1 (продолжение примера 1.2). Поскольку дифференциал

$$d \frac{x_1}{t_1} \Big|_{(4.2)} = x_2(dt_1 + dt_2), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,$$

то скалярная функция

$$\omega: (t, x) \rightarrow \exp \frac{x_1}{t_1}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,$$

является 1-неавтономным 2-цилиндричным условным частным интегралом на любой области $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^3$ системы (4.2).

На основании полиномиального частного интеграла с учётом его кратности и условных частных интегралов строятся первые интегралы системы (PCD) в следующих случаях.

Свойство 1. Пусть система (PCD) имеет полиномиальный частный интеграл $w: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\mathfrak{P}_j w(t, x) = \lambda_1 W_j(t, x) w(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

и условный частный интеграл $\omega: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что в тождествах (1) полиномы

$$S_j(t, x) = \lambda_2 W_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow w^{\alpha_1}(t, x) \exp(\alpha_2 v(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P},$$

где вещественные числа α_1 и α_2 находятся из уравнения (2.1) при условии $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, является первым интегралом на области \mathcal{P} системы (PCD).

Свойство 2. Пусть система (PCD) имеет полиномиальный частный интеграл $w: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ кратности κ такой, что

$$\mathfrak{P}_j K_{h_\xi g_\xi}(t, x) = \lambda_1 R_{h_\xi g_\xi j}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

$$\xi = \overline{1, \varepsilon}, \quad h_\xi \in \mathbb{N}, \quad g_\xi = \overline{1, f_\xi}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

и условный частный интеграл $\omega: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что в тождествах (1) полиномы

$$S_j(t, x) = \lambda_2 R_{h_\xi g_\xi j}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

при фиксированных h_ξ и g_ξ . Тогда скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow \alpha_1 K_{h_\xi g_\xi}(t, x) + \alpha_2 v(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}_0,$$

где вещественные числа α_1 и α_2 находятся из уравнения (2.1) при условии $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, является первым интегралом на области \mathcal{P}_0 системы (PCD).

Свойство 3. Пусть система (PCD) имеет условные частные интегралы

$$\omega_k: (t, x) \rightarrow \exp v_k(t, x), \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad k = 1, k = 2,$$

такие, что

$$\mathfrak{P}_j v_k(t, x) = \lambda_k S_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = 1, k = 2.$$

Тогда скалярная функция

$$F: (t, x) \rightarrow \alpha_1 v_1(t, x) + \alpha_2 v_2(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P},$$

где вещественные числа α_1 и α_2 находятся из уравнения (2.1) при условии $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, является первым интегралом на области \mathcal{P} системы (PCD).

5. Первые интегралы типа Дарбу

Класс \mathcal{A} систем (PCD). (PCD \mathcal{A}). Критерий принадлежности системы (PCD) классу \mathcal{A} . Критерий существования у системы (PCD) класса \mathcal{A} интеграла типа Дарбу. Модификация первого интеграла системы (PCD \mathcal{A}), построенного на основании её полиномиальных и условных частных интегралов.

Рассмотрим задачу построения первого интеграла полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах (PCD) по известным полиномиальным частным интегралам с учётом их кратностей и условным частным интегралам.

Пусть среди полиномиальных частных интегралов

$$w_k: (t, x) \rightarrow w_k(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad k = \overline{1, s+r}, \quad (1)$$

с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами системы (PCD) содержится $s \geq 0$ с кратностями $\varkappa_l, l = \overline{1, s}$, соответственно. Кроме того, известно $q \geq 0$ условных частных интегралов системы (PCD)

$$\omega_\nu: (t, x) \rightarrow \exp v_\nu(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}, \quad \nu = \overline{1, q}. \quad (2)$$

Введём в рассмотрение число

$$\ell = r + q + \sum_{l=1}^s \varkappa_l.$$

Если для системы (PCD) число $\ell \geq 1$, то будем считать, что система (PCD) является системой из класса \mathcal{A} и писать $(PCD) \in \mathcal{A}$. Для систем (PCD) и (IPCD) из класса \mathcal{A} введём условные обозначения $(PCD\mathcal{A})$ и $(IPCD\mathcal{A})$ соответственно.

В соответствии с определениями 1.2, 1.3 и 1.4 имеем следующий критерий принадлежности системы (PCD) классу \mathcal{A} .

Предложение 1. Система (PCD) принадлежит классу \mathcal{A} , если и только если при $\ell \geq 1$ на множестве $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}$ выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_j w_k &\equiv w_k W_{kj}, \quad \mathfrak{P}_j K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} \equiv R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}, \quad \mathfrak{P}_j v_\nu \equiv S_{\nu j}, \\ k &= \overline{1, s+r}, \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}, \quad \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}, \\ l &= \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

где W_{kj} — полиномы по x с голоморфными на области \mathcal{T} по t коэффициентами,

$$K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(t, x) = \frac{Q_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(t, x)}{w_l^{h_{\xi_l}}(t, x)}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}^*,$$

а полиномы по x с голоморфными по t коэффициентами $Q_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, $R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}$ и $S_{\nu j}$ определяются в соответствии с понятиями кратности полиномиального частного интеграла и условного частного интеграла.

На основании полиномиальных частных интегралов (1) с учётом их кратностей и условных частных интегралов (2) системы (PCD) построим на подобласти $\tilde{\mathcal{P}}$ области \mathcal{P} функции

$$X: (t, x) \rightarrow \prod_{k=1}^{s+r} w_k^{\gamma_k}(t, x),$$

и

$$Y: (t, x) \rightarrow \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(t, x) + \sum_{\nu=1}^q \beta_{\nu} v_{\nu}(t, x),$$

где γ_k , $\alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}$, β_{ν} — некоторые числа из поля \mathbb{R} .

Функция

$$W: (t, x) \rightarrow X(t, x) \exp(Z(t) + Y(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \quad (4)$$

где $Z: \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторая функция, голоморфная по t на области $\tilde{\mathcal{T}}$, являющейся естественной проекцией области $\tilde{\mathcal{P}}$ на координатное подпространство Ot , с учётом системы тождеств (3) является первым интегралом на области $\tilde{\mathcal{P}}$ системы (PCD), если и только если

$$\partial_{t_j} Z(t) + \Xi_j(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_j(t, x) = & \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k W_{kj}(t, x) + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}(t, x) + \\ & + \sum_{\nu=1}^q \beta_{\nu} S_{\nu j}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Тем самым получен критерий наличия у системы (PCD) класса \mathcal{A} первого интеграла (4), который назовём *первым интегралом типа Дарбу*.

Теорема 1. Для того чтобы система (PCDA) имела первый интеграл (4) на подобласти $\tilde{\mathcal{P}}$ области \mathcal{P} , необходимо и достаточно существования голоморфной на области $\tilde{\mathcal{T}}$, являющейся естественной проекцией области $\tilde{\mathcal{P}}$ на координатное подпространство Ot , функции $Z: \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ и вещественных постоянных $\gamma_k, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \beta_\nu$ таких, что выполняется система тождеств (5).

Рассмотрим задачу о модификации первого интеграла

$$\begin{aligned} \Phi: (t, x) \rightarrow F(w_1(t, x), \dots, w_{s+r}(t, x), K_{1h_1 1}(t, x), \dots, \\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(t, x), v_1(t, x), \dots, v_q(t, x)) Z(t), \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где F и Z — некоторые голоморфные функции, полиномиальной системы (PCDA), построенного на основании полиномиальных частных интегралов (1) с учётом их кратностей и условных частных интегралов (2).

При этом априори будем считать, что у системы (PCD) нет первых интегралов вида (6), построенных по меньшему числу функций $w_1, \dots, w_{s+r}, K_{h_1 1}, \dots, K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}, v_1, \dots, v_q$.

Без нарушения общности рассуждений функцию (6) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: (t, x) \rightarrow \tilde{F}(\ln w_1(t, x), \dots, \ln w_{s+r}(t, x), K_{1h_1 1}(t, x), \dots, \\ K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(t, x), v_1(t, x), \dots, v_q(t, x)) \ln Z(t), \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}^*, \end{aligned} \quad (7)$$

где \tilde{F} — некоторая голоморфная функция.

С учётом системы тождеств (3) функция (7) является первым интегралом на подобласти $\tilde{\mathcal{P}}^*$ области \mathcal{P} системы (PCDA) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{s+r} W_{kj} \partial_{\ln w_k} \ln \tilde{F} + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j} \partial_{K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}} \ln \tilde{F} + \\
& + \sum_{\nu=1}^q S_{\nu j} \partial_{v_\nu} \ln \tilde{F} + \partial_{t_j} \ln Z(t) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}^*, \quad j = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$\begin{aligned}
y_k &= \ln w_k, \quad k = \overline{1, s+r}, \quad y_{s+r+1} = K_{1h_1 1}, \dots, \\
y_{s+r+\lambda} &= K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}, \quad y_{s+r+\lambda+\nu} = v_\nu, \quad \nu = \overline{1, q},
\end{aligned} \tag{9}$$

где число $\lambda = \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} f_{\xi_l}$.

Тогда в соответствии с системой тождеств (8) дифференциальная система (PCDA) имеет первый интеграл (7) на области \mathcal{P}^* , если и только если полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx &= P(t, x) dt, \quad dy_k = \sum_{j=1}^m W_{kj}(t, x) dt_j, \quad k = \overline{1, s+r}, \\
dy_{s+r+1} &= \sum_{j=1}^m R_{1h_1 1j}(t, x) dt_j, \dots, \\
dy_{s+r+\lambda} &= \sum_{j=1}^m R_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s} j}(t, x) dt_j, \\
dy_{s+r+\lambda+\nu} &= \sum_{j=1}^m S_{\nu j}(t, x) dt_j, \quad \nu = \overline{1, q},
\end{aligned} \tag{10}$$

имеет на области \mathcal{V} из пространства $\mathbb{R}^{m+n+\rho}$ n -цилиндричный первый интеграл

$$\tilde{\Psi}: (t, x, y) \rightarrow \tilde{F}(y) \ln Z(t), \quad \forall (t, x, y) \in \mathcal{V},$$

где $y = (y_1, \dots, y_\rho)$, $\rho = s + r + \lambda + q$.

При этом тождества (8) для системы уравнений в полных дифференциалах (10) на области \mathcal{V} будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s+r} W_{kj}(t, x) \partial_{y_k} \ln \tilde{F}(y) + R_{1h_1 1j}(t, x) \partial_{y_{s+r+1}} \ln \tilde{F}(y) + \dots + \\ + R_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s} j}(t, x) \partial_{y_{s+r+\lambda}} \ln \tilde{F}(y) + \\ + \sum_{\nu=1}^q S_{\nu j}(t, x) \partial_{y_{s+r+\lambda+\nu}} \ln \tilde{F}(y) + \partial_{t_j} \ln Z(t) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (11)$$

где область $\mathcal{V} = \overset{*}{\mathcal{P}} \times \mathcal{Y}$, область $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^\rho$ и является образом области $\overset{*}{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ при отображении (9).

Система тождеств (11) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \partial_{y_k} \tilde{F}(y) &= \gamma_k a(y), \quad \forall y \in \mathcal{Y}, \quad k = \overline{1, s+r}, \\ \partial_{y_{s+r+\tau}} \tilde{F}(y) &= \alpha_\tau a(y), \quad \forall y \in \mathcal{Y}, \quad \tau = \overline{1, \lambda}, \\ \partial_{y_{s+r+\lambda+\nu}} \tilde{F}(y) &= \beta_\nu a(y), \quad \forall y \in \mathcal{Y}, \quad \nu = \overline{1, q}, \end{aligned}$$

где $\gamma_k, \alpha_\tau, \beta_\nu$ — постоянные, голоморфная на области \mathcal{Y} функция a является тождественной постоянной, когда $Z(t) \neq \text{const}$ на области $\overset{*}{\mathcal{T}}$.

Следовательно, система тождеств (8) имеет место, если и только если на области $\overset{*}{\mathcal{P}}$ выполняется система тождеств

$$\begin{aligned}\partial_{\ln w_k} \ln \tilde{F} &\equiv \gamma_k a, \quad \partial_{K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}} \ln \tilde{F} \equiv \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} a, \quad \partial_{v_\nu} \ln \tilde{F} \equiv \beta_\nu a, \\ k &= \overline{1, s+r}, \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}, \\ \xi_l &= \overline{1, \varepsilon_l}, \quad l = \overline{1, s}, \quad \nu = \overline{1, q},\end{aligned}\tag{12}$$

где числа $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} \in \mathbb{R}$, $\beta_\nu \in \mathbb{R}$, а голоморфная на области \mathcal{Y} функция a является тождественной постоянной, когда $Z(t) \not\equiv \text{const}$ на области $\overset{*}{\mathcal{T}}$.

Таким образом, выполняются условия теоремы 1, а значит, имеет место следующая закономерность.

Теорема 2. *Если система (РСДА) имеет первый интеграл (6) на области $\tilde{\mathcal{P}}$, то его можно представить в виде (4).*

Пример 1 (продолжение примеров 1.2 и 1.4). На основании 1-неавтономного полиномиального частного интеграла

$$w: (t, x) \rightarrow -1 + \frac{x_1^2}{t_1^2} + x_2^2 + x_3^2, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,$$

и 1-неавтономного 2-цилиндричного условного частного интеграла

$$\omega: (t, x) \rightarrow \exp \frac{x_1}{t_1}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3,$$

системы (4.2) строим её 1-неавтономный первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow \left(1 - \frac{x_1^2}{t_1^2} - x_2^2 - x_3^2\right) \exp\left(-2 \frac{x_1}{t_1}\right), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3.$$

6. Последние множители типа Дарбу

Критерий существования у системы (PCDA) последнего множителя типа Дарбу. Модификация последнего множителя системы (PCDA), построенного на основании её полиномиальных и условных частных интегралов.

С учётом системы тождеств (3.5) голоморфная на подобласти $\tilde{\mathcal{P}}$ области \mathcal{P} функция

$$\mu: (t, x) \rightarrow X(t, x) \exp(Z(t) + Y(t, x)), \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \quad (1)$$

будет последним множителем на области $\tilde{\mathcal{P}}$ системы (PCDA), если и только если выполняется система тождеств

$$\partial_{t_j} Z(t) + \Xi_j(t, x) = -\operatorname{div} \mathfrak{P}_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Поэтому имеет место следующий критерий наличия у системы (PCDA) последнего множителя (1), который будем называть *последним множителем типа Дарбу*.

Теорема 1. *Для того чтобы система (PCDA) имела голоморфный на подобласти $\tilde{\mathcal{P}}$ области \mathcal{P} последний множитель (1), необходимо и достаточно существования голоморфной на области $\tilde{\mathcal{T}}$, являющейся естественной проекцией области $\tilde{\mathcal{P}}$ на координатное подпространство O_t , функции $Z: \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ и таких вещественных постоянных γ_k , $\alpha_{lh_\xi g_\xi}$, β_ν , что выполняется система тождеств (2).*

Задача о модификации голоморфного на подобласти $\tilde{\mathcal{P}}$ области \mathcal{P} последнего множителя

$$\begin{aligned} \mu: (t, x) \rightarrow & F(w_1(t, x), \dots, w_{s+r}(t, x), K_{1h_1 1}(t, x), \dots, \\ & K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(t, x), v_1(t, x), \dots, v_q(t, x)) Z(t), \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}}, \end{aligned} \quad (3)$$

системы (PCD \mathcal{A}) такого, что система (PCD \mathcal{A}) не имеет последнего множителя вида (3) и первых интегралов вида (6.5), построенных на основании меньшего числа функций

$$w_k, k = \overline{1, s+r}, \quad K_{1h_1 1}, \dots, K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}, \quad v_\nu, \nu = \overline{1, q},$$

решается подобно такой же задаче для голоморфного первого интеграла вида (6.5).

При этом тождества, соответствующие тождествам (8.5), отличаются лишь тем, что в правой части будет

$$- \operatorname{div} \mathfrak{P}_j(t, x),$$

а не нуль.

Выполняются эти тождества, если и только если имеет место система тождеств (12.5), где голоморфная на области \mathcal{Y}^* скалярная функция a является тождественной постоянной, когда

$$\partial_{t_j} Z(t) \neq - \operatorname{div} \mathfrak{P}_j(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{P}^*, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда в соответствии с теоремой 1 приходим к следующему заключению.

Теорема 2. *Если система (PCD \mathcal{A}) имеет последний множитель (3), то его можно представить в виде (1).*

§ 3. Частные интегралы автономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах

Из всего множества полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах (PCD) выделим автономные

$$dx = P(x) dt, \quad (\text{APCD})$$

когда элементы $P_{ij}: x \rightarrow P_{ij}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, матрицы $P(x) = \|P_{ij}(x)\|_{n \times m}$ суть полиномы по x_1, \dots, x_n степеней $\max_{i=\overline{1, n}} \{\deg P_{ij}(x)\} = p_j$, $j = \overline{1, m}$, с вещественными коэффициентами.

Система (APCD) индуцирует как линейные операторы

$$\mathfrak{p}_j(x) = \sum_{i=1}^n P_{ij}(x) \partial_{x_i}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

так и линейные операторы

$$\mathfrak{P}_j(t_j, x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{p}_j(x), \quad \forall (t_j, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Действия операторов (2), как и операторов (1), будем называть *производными Ли в силу системы* (APCD), а сами операторы (1) назовём *автономными* операторами дифференцирования в силу системы (APCD).

1. Частные интегралы

Автономный полиномиальный частный интеграл. Комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл. Критерий существования комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла. Комплексно сопряжённый автономный полиномиальный частный интеграл. Вещественный автономный полиномиальный частный интеграл, определяемый комплекснозначным автономным полино-

миальным частным интегралом. Производные Ли функции аргумента комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла. Произведение автономных полиномиальных частных частных интегралов. Критерий существования вещественного автономного полиномиального частного интеграла, определяемого комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом. Кратность вещественного и комплекснозначного автономных полиномиальных частных интегралов. Кратность комплексно сопряжённого автономного полиномиального частного интеграла. Автономный условный частный интеграл.

Для системы (APCD), как и для системы (PCD), введём понятие полиномиального частного интеграла (1.2.2) посредством определения 1.2.2 с учётом различий между операторами (1.1.2) и (1.0), на основании которых построены дифференциальные системы (PCD) и (APCD) соответственно. Наряду с полиномиальными частными интегралами (1.2.2) для систем (APCD) будем рассматривать их автономный аналог.

Определение 1. Полином

$$w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

назовём **автономным полиномиальным частным интегралом** системы (APCD), если производные Ли в силу системы (APCD) полинома w равны

$$\mathbf{p}_j w(x) = w(x) W_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где $W_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, суть полиномы.

Пример 1 (продолжение примера 2.2.2). Рассмотренная в примере 2.2.2 автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (5.2.2) имеет автономные полиномиальные частные интегралы (1-цилиндричные)

$$w_1: x \rightarrow 1 + x_1^2 + x_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

и

$$w_2: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Понятие автономного полиномиального частного интеграла расширим посредством

Определение 2. Полином

$$\mathfrak{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad (4)$$

назовём **комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD)**, если производные \mathcal{L}_i в силу системы (APCD) полинома (4) равны

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}(x) = \mathfrak{w}(x) \mathfrak{W}_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где $\mathfrak{W}_j, j = \overline{1, m}$, — полиномы по x из \mathbb{R}^n с, вообще говоря, комплексными коэффициентами.

Система тождеств (5) на \mathbb{R}^n равносильна вещественной системе тождеств при $j = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) &= \operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Re} \mathfrak{W}_j(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x), \\ \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) &= \operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Re} \mathfrak{W}_j(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Тем самым устанавливаем следующий критерий существования комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла у системы (APCD).

Лемма 1. Полином (4) является комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (6).

С учётом этого критерия докажем следующие закономерности относительно комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах.

Свойство 1. Если система (APCD) имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (4), то ему комплексно сопряжённый полином

$$\overline{\mathfrak{w}} : x \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) - i \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

также является комплексозначным автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD), причём выполняется система тождеств

$$p_j \overline{w}(x) = \overline{w}(x) \overline{W}_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

где полиномы \overline{W}_j , $j = \overline{1, m}$, комплексно сопряжены соответственно с полиномами W_j , $j = \overline{1, m}$, из тождеств (5).

Действительно, с учётом леммы 1 на \mathbb{R}^n имеем, что

$$\begin{aligned} p_j \overline{w} &= p_j (\operatorname{Re} w - i \operatorname{Im} w) = p_j \operatorname{Re} w - i p_j \operatorname{Im} w = \\ &= \operatorname{Re} w \operatorname{Re} W_j - \operatorname{Im} w \operatorname{Im} W_j - i (\operatorname{Re} w \operatorname{Im} W_j + \operatorname{Im} w \operatorname{Re} W_j) = \\ &= (\operatorname{Re} w - i \operatorname{Im} w) \cdot (\operatorname{Re} W_j - i \operatorname{Im} W_j) = \overline{w} \overline{W}_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 2. Если система (APCD) имеет комплексозначный автономный полиномиальный частный интеграл (4), то вещественный полином

$$p: x \rightarrow \operatorname{Re}^2 w(x) + \operatorname{Im}^2 w(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

будет автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD) и на \mathbb{R}^n выполняется система тождеств

$$p_j (\operatorname{Re}^2 w + \operatorname{Im}^2 w) \equiv 2 (\operatorname{Re}^2 w + \operatorname{Im}^2 w) \operatorname{Re} W_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где полиномы W_j , $j = \overline{1, m}$, находятся из тождеств (5).

Действительно, с учётом леммы 1 на \mathbb{R}^n имеем:

$$\begin{aligned} p_j (\operatorname{Re}^2 w + \operatorname{Im}^2 w) &= 2 \operatorname{Re} w \, p_j \operatorname{Re} w + 2 \operatorname{Im} w \, p_j \operatorname{Im} w = \\ &= 2 \operatorname{Re} w (\operatorname{Re} w \operatorname{Re} W_j - \operatorname{Im} w \operatorname{Im} W_j) + 2 \operatorname{Im} w (\operatorname{Re} w \operatorname{Im} W_j + \\ &\quad + \operatorname{Im} w \operatorname{Re} W_j) = 2 (\operatorname{Re}^2 w + \operatorname{Im}^2 w) \operatorname{Re} W_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 3. Пусть система (APCD) имеет комплексно-значный автономный полиномиальный частный интеграл (4). Тогда производные Ли в силу системы (APCD) экспоненциальной функции

$$\psi: x \rightarrow \exp \varphi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где

$$\varphi: x \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (9)$$

равны

$$\mathfrak{p}_j \exp \varphi(x) = \exp \varphi(x) \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (10)$$

где полиномы \mathfrak{W}_j , $j = \overline{1, m}$, находятся из тождеств (5), область \mathcal{X} из пространства \mathbb{R}^n такова, что её дополнение до \mathbb{R}^n содержит множество всех нулей полинома $\operatorname{Re} \mathfrak{w}$.

Действительно, с учётом леммы 1 имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \exp \varphi(x) &= \exp \varphi(x) \mathfrak{p}_j \varphi(x) = \exp \varphi(x) \mathfrak{p}_j \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}(x)} = \\ &= \frac{\exp \varphi(x)}{1 + \frac{\operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(x)}} \cdot \frac{\operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) \mathfrak{p}_j \operatorname{Re} \mathfrak{w}(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(x)} = \\ &= \frac{\exp \varphi(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}(x)} (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x) + \\ &\quad + \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Re} \mathfrak{W}_j(x)) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) (\operatorname{Re} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Re} \mathfrak{W}_j(x) - \\ &\quad - \operatorname{Im} \mathfrak{w}(x) \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x))) = \exp \varphi(x) \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}. \blacksquare \end{aligned}$$

Функция (9) является функцией аргумента комплекснозначного полинома (4). Относительно этой функции из тождеств (10) получаем

$$\mathfrak{p}_j \varphi(x) = \operatorname{Im} \mathfrak{W}_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Тем самым получена формула вычисления производных Ли в силу системы (APCD) функции аргумента комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла (4).

Основываясь на определениях 1 и 2 методом, аналогичным методу доказательства свойства 4.2.2, доказываем

Свойство 4. Произведение $u_1 u_2$ полиномов $u_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ и $u_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$, где \mathbb{K} — поле вещественных \mathbb{R} или комплексных \mathbb{C} чисел, является автономным полиномиальным частным интегралом (вещественным или комплекснозначным) системы (APCD) тогда и только тогда, когда его сомножители u_1 и u_2 являются автономными полиномиальными частными интегралами системы (APCD).

Из этого свойства и свойства 1 следует

Свойство 5. Вещественный полином (7) является автономным полиномиальным частным интегралом системы (APCD), если и только если система (APCD) имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (4) (или комплексно сопряжённый ему).

Пример 2 (продолжение примеров 2.2.2 и 1). Рассмотренная в примере 2.2.2 система (5.2.2) имеет вещественный автономный полиномиальный частный интеграл

$$w_2: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Так как

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + i x_2)(x_1 - i x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

то в соответствии со свойством 5 система (5.2.2) имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1: x \rightarrow x_1 + i x_2, \quad \mathfrak{w}_2: x \rightarrow x_1 - i x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Используя частный интеграл (3) системы (5.2.2), по свойству 4 заключаем, что полиномы

$$u: x \rightarrow w_1^{n_1}(x) \mathfrak{w}_1^{m_1}(x) \mathfrak{w}_2^{m_2}(x), \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

при любых целых неотрицательных n_1, m_1, m_2 будут автономными полиномиальными частными интегралами (вещественными или комплекснозначными) системы (5.2.2).

Заметим, что вещественный автономный полиномиальный частный интеграл (3) не определяет интегрального многообразия

$$\{x: w_1(x) = 0\}$$

на фазовом пространстве \mathbb{R}^3 . А каждый из комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов \mathfrak{w}_1 и \mathfrak{w}_2 определяет интегральное многообразие на фазовом пространстве \mathbb{R}^3 в виде прямой

$$\{x: x_1 = x_2 = 0\}.$$

Следуя определению 1.3.2, где введено понятие кратности полиномиального частного интеграла системы (PCD), для системы (APCD) введём понятие кратности автономных полиномиальных частных интегралов (вещественных и комплекснозначных).

Определение 3. Пусть автономный полиномиальный частный интеграл (1) системы (APCD) такой, что существуют полиномы $Q_{h_\xi g_\xi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $R_{h_\xi g_\xi j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие системе тождеств

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j K_{h_\xi g_\xi}(x) &= R_{h_\xi g_\xi j}(x), \forall x \in \mathcal{X}, \\ \xi &= \overline{1, \varepsilon}, \quad h_\xi \in \mathbb{N}, \quad g_\xi = \overline{1, f_\xi}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$K_{h_\xi g_\xi}(x) = \frac{Q_{h_\xi g_\xi}(x)}{w^{h_\xi}(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \xi = \overline{1, \varepsilon}, \quad h_\xi \in \mathbb{N}, \quad g_\xi = \overline{1, f_\xi},$$

множество \mathcal{X} из \mathbb{R}^n таково, что $w(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{X}$, причём:

1) каждый полином $Q_{h_\xi g_\xi}$, $\xi = \overline{1, \varepsilon}$, $h_\xi \in \mathbb{N}$, $g_\xi = \overline{1, f_\xi}$, взаимно прост с частным интегралом (1);

2) у полиномов $R_{h_\xi g_\xi j}$, $j = \overline{1, m}$, степени таковы, что

$$\max \left\{ \deg R_{h_\xi g_\xi j}(x) : \xi = \overline{1, \varepsilon}, h_\xi \in \mathbb{N}, g_\xi = \overline{1, f_\xi} \right\} \leq p_j - 1.$$

Тогда число $\varkappa = 1 + \sum_{\xi=1}^{\varepsilon} f_\xi$ назовём **кратностью** автономного полиномиального частного интеграла (1).

В примере 1.3.2 построен двукратный автономный полиномиальный частный интеграл системы (5.2.2).

Пример 3. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1(1 + x_1 + x_2) dt_1 + 2x_1(1 + x_1 + x_2) dt_2, \\ dx_2 &= (2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) dt_1 + (4x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) dt_2 \end{aligned} \quad (13)$$

имеет автономный полиномиальный частный интеграл

$$w: x \rightarrow x_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad (14)$$

для которого в тождествах (2) функции

$$W_1: x \rightarrow 1 + x_1 + x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{и} \quad W_2: x \rightarrow 2(1 + x_1 + x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Дифференциал в силу системы (13)

$$\begin{aligned} & d \frac{x_2(2 + 2x_1 + x_2)}{x_1^2} \Big|_{(13)} = \\ &= \frac{1}{x_1^4} \left(x_1^2 d(2x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \Big|_{(13)} - (2x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2) dx_1^2 \Big|_{(13)} \right) = \\ &= - \frac{2}{x_1^3} (x_2(2 + x_1 + x_2) dx_1 - x_1(1 + x_1 + x_2) dx_2) \Big|_{(13)} = \\ &= - \frac{2(1 + x_1 + x_2)}{x_1^2} (x_2(2 + x_1 + x_2)(dt_1 + 2dt_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) dt_1 - (4x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) dt_2) = \\
& = 2(1 + x_1 + x_2)(dt_1 + dt_2), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}, \mathcal{X} = \{x: x_1 \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Поэтому выполняется система тождеств (12) при

$$\varepsilon = \xi = 1, \quad h_1 = 2, \quad g_1 = f_1 = 1,$$

$$Q_{21}(x) = x_2(2 + 2x_1 + x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$R_{211}(x) = R_{212}(x) = 2(1 + x_1 + x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

причём полином Q_{21} взаимно прост с автономным полиномиальным частным интегралом (14), а у полиномов R_{211} и R_{212} степени равны 1 и равны $p_1 - 1 = p_2 - 1 = 1$.

В соответствии с определением 3 автономный полиномиальный частный интеграл (14) системы (13) имеет кратность $\varkappa = 1 + f_1 = 2$.

Вместе с тем не существует полинома Q_{11} , взаимно простого с (14), такого, что выполняется система тождеств (12) при $h_1 = 1$, то есть, на $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$ дифференциал в силу системы (13)

$$d \frac{Q_{11}(x)}{x_1} \Big|_{(13)} = (\alpha_1 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2) dt_1 + (\alpha_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 x_2) dt_2.$$

Действительно, поскольку на $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$

$$\begin{aligned}
d \frac{Q_{11}(x)}{x_1} \Big|_{(13)} &= \frac{1}{x_1^2} (x_1 dQ_{11}(x) - Q_{11}(x) dx_1) \Big|_{(13)} = \\
&= \frac{1}{x_1^2} ((x_1 \partial_{x_1} Q_{11}(x) - Q_{11}(x)) dx_1 + x_1 \partial_{x_2} Q_{11}(x) dx_2) \Big|_{(13)} = \\
&= \frac{1}{x_1} ((1 + x_1 + x_2)(x_1 \partial_{x_1} Q_{11}(x) - Q_{11}(x)) + (2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + \\
&+ x_2^2) \partial_{x_2} Q_{11}(x)) dt_1 + \frac{1}{x_1} (2(1 + x_1 + x_2)(x_1 \partial_{x_1} Q_{11}(x) - Q_{11}(x)) + \\
&+ (4x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) \partial_{x_2} Q_{11}(x)) dt_2,
\end{aligned}$$

то по необходимости должно выполняться тождество

$$\begin{aligned} x_1(1+x_1+x_2)\partial_{x_1}Q_{11}(x) + (2x_2+x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\partial_{x_2}Q_{11}(x) = \\ = (1+x_1+x_2)Q_{11}(x) + x_1(\alpha_1+\beta_1x_1+\gamma_1x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Для полинома

$$Q_{11}(x) = \sum_{i+j=1}^N a_{ij} x_1^i x_2^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

это тождество имеет место лишь при $a_{0j} = 0$, $j = \overline{0, N}$.

Значит, полином Q_{11} не будет взаимно прост с полиномом (14).

Ситуация, отражённая в примере 3, говорит о том, что при установлении кратности \varkappa автономного полиномиального частного интеграла (1) в тождествах (12) натуральные числа h_ξ не обязательно должны выбираться последовательно из натурального ряда и начинаться с единицы.

Аналогично кратности вещественного введём понятие кратности комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла.

Определение 4. Пусть комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (4) системы (APCD) такой, что существуют комплекснозначные полиномы $\mathfrak{Q}_{h_\zeta \mathfrak{g}_\zeta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{R}_{h_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющие системе тождеств

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \mathfrak{K}_{h_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) &= \mathfrak{R}_{h_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \\ \zeta &= \overline{1, \mathfrak{e}}, \quad h_\zeta \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{15}$$

где функция

$$\mathfrak{K}_{h_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \frac{\mathfrak{Q}_{h_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x)}{\mathfrak{w}_{h_\zeta}(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}, \quad h_\zeta \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta},$$

множество \mathcal{X} из \mathbb{R}^n таково, что $\mathfrak{w}(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{X}$, причём:

1) каждый полином $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}, \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}, \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}$, взаимно прост с комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом (4);

2) у полиномов $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}, j = \overline{1, m}$, степени таковы, что

$$\max \left\{ \deg \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x) : \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}, \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta} \right\} \leq p_j - 1.$$

Тогда число $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_\zeta$ назовём **кратностью** комплекснозначного частного интеграла (4).

Система тождеств (15) равносильна системе

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) &= \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \quad \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \\ \forall x \in \mathcal{X}, \quad \zeta &= \overline{1, \mathfrak{e}}, \quad \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (16)$$

На основании свойства 1, определения 4 и равносильности систем тождеств (15) и (16), получаем

Свойство 6. Пусть система (APCD) имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (4) кратности \mathfrak{z} . Тогда ему комплексно сопряжённый автономный полиномиальный частный интеграл системы (APCD) также имеет кратность \mathfrak{z} .

Пример 4. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(2x_1 + x_1^2 - x_2^2) dt_1 + x_1(4x_2 + x_1^2 - x_2^2) dt_2, \\ dx_2 &= (-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) dt_1 + 2(-x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2) dt_2 \end{aligned} \quad (17)$$

такова, что полином

$$\mathfrak{w}: x \rightarrow x_1 + i x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

является её комплекснозначным автономным полиномиальным частным

интегралом с функциями

$$\mathfrak{W}_1: x \rightarrow x_2(1 + x_1) - i(x_1 - x_2^2), \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_2: x \rightarrow 2x_2 + x_1^2 - i x_1(2 - x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

в тождествах (5).

Пусть

$$\mathfrak{Q}_{11}: x \rightarrow x_1 - i(1 - x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда на $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ производные Ли в силу системы (17)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \frac{\mathfrak{Q}_{11}(x)}{\mathfrak{w}(x)} &= \mathfrak{p}_j \left(1 - \frac{i}{x_1 + i x_2} \right) = \frac{i}{(x_1 + i x_2)^2} \mathfrak{p}_j(x_1 + i x_2) = \\ &= \frac{i}{(x_1 + i x_2)^2} \mathfrak{w}(x) \mathfrak{W}_j(x) = \frac{i}{x_1 + i x_2} \mathfrak{W}_j(x), j = 1, 2, \end{aligned}$$

соответственно равны

$$\mathfrak{R}_{111}(x) = 1 + i x_2, \forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathfrak{R}_{112}(x) = 2 + i x_1, \forall x \in \mathcal{X}. \quad (18)$$

По определению 4, комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл \mathfrak{w} является двукратным.

Пример 5. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(-x_1^2 + x_2^2) dt_1 + x_1(2x_2 + x_1^2 - x_2^2) dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2^2 dt_1 + (-x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2) dt_2 \end{aligned} \quad (19)$$

такова, что функция

$$\mathfrak{w}: x \rightarrow x_1 + i x_2, \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

является её комплекснозначным автономным полиномиальным частным интегралом, для которого в тождествах (5) функции

$$\mathfrak{W}_1: x \rightarrow -x_2(x_1 + i x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_2: x \rightarrow x_2 + x_1^2 - i x_1(1 - x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть

$$\mathfrak{Q}_{11}: x \rightarrow 1 + x_1 + i x_2, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда на $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ производные Ли в силу системы (19)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j \frac{\mathfrak{Q}_{11}(x)}{\mathfrak{w}(x)} &= \mathfrak{p}_j \left(1 + \frac{1}{x_1 + i x_2} \right) = - \frac{1}{(x_1 + i x_2)^2} \mathfrak{p}_j (x_1 + i x_2) = \\ &= - \frac{1}{(x_1 + i x_2)^2} \mathfrak{w}(x) \mathfrak{W}_j(x) = - \frac{1}{x_1 + i x_2} \mathfrak{W}_j(x), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

соответственно равны

$$\mathfrak{R}_{111}(x) = x_2, \forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathfrak{R}_{112}(x) = -x_1 + i, \forall x \in \mathcal{X}. \quad (20)$$

По определению 4, комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл \mathfrak{w} является двукратным.

Для систем (APCD) введём автономный аналог условного частного интеграла (определение 1.4.2).

Определение 5. Функцию

$$\omega: x \rightarrow \exp v(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — полином, назовём **автономным условным частным интегралом** системы (APCD), если производные Ли в силу системы (APCD) равны

$$\mathfrak{p}_j v(x) = S_j(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (21)$$

где полиномы S_j степеней $\deg S_j(x) \leq p_j - 1, j = \overline{1, m}$.

Автономный условный частный интеграл характеризуется прежде всего тем, что он не определяет интегрального многообразия $\{x: \omega(x) = 0\}$ системы (APCD) на фазовом пространстве, а также тем, что он построен на полиномиальной основе и определён на всём фазовом пространстве.

Пример 6. Автономная полиномиальная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= (1 + x_1 + x_2^2) dt_1 + (2 + x_2 + x_1 x_2 + x_2^2) dt_2, \\ dx_2 &= (x_1 + x_2^2) dt_1 + x_2(1 + x_1 + x_2) dt_2 \end{aligned} \quad (22)$$

имеет автономный условный частный интеграл

$$\omega: x \rightarrow \exp(x_1 - x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad (23)$$

для которого в тождествах (21) функции

$$S_1: x \rightarrow 1, \forall x \in \mathbb{R}^2, \text{ и } S_2: x \rightarrow 2, \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (24)$$

2. Автономные системы типа Дарбу

Класс \mathfrak{A} систем (APCD). Критерий принадлежности системы (APCD) классу \mathfrak{A} . Критерий существования у системы (APCD) класса \mathfrak{A} первого интеграла типа Дарбу. Критерий существования у системы (APCD) класса \mathfrak{A} последнего множителя типа Дарбу. Модификация первого интеграла системы (APCD \mathfrak{A}), построенного на основании её автономных полиномиальных и условных частных интегралов. Модификация последнего множителя системы (APCD \mathfrak{A}), построенного на основании её автономных полиномиальных и условных частных интегралов.

Пусть система (APCD) имеет $s + r$ вещественных автономных полиномиальных частных интегралов

$$w_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, k = \overline{1, s + r}, \quad (1)$$

среди которых содержится $s \geq 0$ соответственно с кратностями $\mathfrak{x}_l, l = \overline{1, s}$, и $\mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}}, \quad (2)$$

среди которых содержится $\mathfrak{s} \geq 0$ соответственно с кратностями $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}, \mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}$.

Кроме того, известно $q \geq 0$ автономных условных частных интегралов

$$\omega_{\nu}: x \rightarrow \exp v_{\nu}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \nu = \overline{1, q}, \quad (3)$$

где $v_{\nu}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \nu = \overline{1, q}$, — полиномы.

Составим число

$$\ell = r + \mathfrak{r} + \sum_{l=1}^s \mathfrak{x}_l + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\mathfrak{s}} \mathfrak{z}_l + q.$$

Если для системы (APCD) число $\ell \geq 1$, то будем считать, что система (APCD) является системой класса \mathfrak{A} и обозначать её (APCD \mathfrak{A}).

В соответствии с определениями 1.1 – 5.1 и свойствами 2.1 и 3.1 получаем следующий критерий принадлежности системы (APCD) классу \mathfrak{A} .

Теорема 1. Система (APCD) принадлежит классу \mathfrak{A} , если и только если выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j w_k(x) &= w_k(x) W_{kj}(x), \quad \mathfrak{p}_j K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) = R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}(x), \\ \mathfrak{p}_j (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)) &= 2(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)) \operatorname{Re} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x), \\ \mathfrak{p}_j \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)} &= \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x), \quad \mathfrak{p}_j \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) = \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(x), \\ &\quad (4) \\ \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) &= \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(x), \quad \mathfrak{p}_j v_{\nu}(x) = S_{\nu j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}, \\ j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s+r}, \quad l = \overline{1, s}, \quad \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}, \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}, \\ \mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}}, \quad \mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}, \quad \zeta_l = \overline{1, \mathfrak{e}_l}, \quad \mathfrak{h}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_l}}, \quad \nu = \overline{1, q}, \end{aligned}$$

где $W_{kj}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ суть полиномы; функции

$$K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) = \frac{Q_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x)}{w^{h_{\xi_l}}(x)}, \quad \mathfrak{K}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) = \frac{\mathfrak{Q}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x)}{\mathfrak{w}^{h_{\zeta_l}}(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{X};$$

а полиномы

$$R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Re_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C},$$

$$Q_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Im_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{и} \quad S_{\nu j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

определяются в соответствии с понятиями кратности автономного полиномиального частного интеграла и автономного условного частного интеграла, когда

$$\varkappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} f_{\xi_l}, \quad \mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \mathfrak{f}_{\zeta_l}.$$

На основании автономных полиномиальных частных интегралов (1) и (2) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (3) системы (APCD \mathfrak{A}) построим функции

$$X : x \rightarrow \prod_{k=1}^{s+r} w_k^{\gamma_k}(x) \prod_{\mathfrak{k}=1}^{s+\mathfrak{r}} (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x))^{\eta_{\mathfrak{k}}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

и

$$\begin{aligned} Y : x \rightarrow & \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) + \sum_{\nu=1}^q \beta_{\nu} v_{\nu}(x) + \\ & + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{s+\mathfrak{r}} \tau_{\mathfrak{k}} \arctg \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}(x)} + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_l}} \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \Re_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) + \\ & + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\mathfrak{f}_{\zeta_l}} \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \Re_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}, \end{aligned}$$

где $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \beta_{\nu}, \tau_{\mathfrak{k}}, \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ — числа из поля \mathbb{R} .

Функция

$$W: (t, x) \rightarrow X(x) \exp(It + Y(x)), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', \quad (5)$$

где $I = (I_1, \dots, I_m)$, $I_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, с учётом системы тождеств (4) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD \mathfrak{A}), если и только если

$$I_j + \Xi_j(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_j: x \rightarrow & \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k W_{kj}(x) + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} j}(x) + \\ & + 2 \sum_{\mathfrak{k}=1}^{s+\tau} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{Re} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x) + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{f_{\zeta_l}} \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(x) + \\ & + \sum_{\nu=1}^q \beta_{\nu} S_{\nu j}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{s+\tau} \tau_{\mathfrak{k}} \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}j}(x) + \\ & + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{f_{\zeta_l}} \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Тем самым доказана

Теорема 2. Для того чтобы система (APCD \mathfrak{A}) имела первый интеграл (5), необходимо и достаточно существования постоянных $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \beta_{\nu}, I_j$ таких, что выполняется система тождеств (6).

С учётом системы тождеств (4) на основании определения последнего множителя заключаем, что функция

$$\mu: (t, x) \rightarrow X(x) \exp(It + Y(x)), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', \quad (7)$$

будет последним множителем на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD \mathfrak{A}), если и только если

$$I_j + \Xi_j(x) = -\operatorname{div} \mathbf{p}_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

и можем утверждать

Теорема 3. *Для того чтобы система (APCD \mathfrak{A}) имела последний множитель (7), необходимо и достаточно существования постоянных $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}, \alpha_{1h_{\varepsilon_l} g_{\varepsilon_l}}, \varphi_{1h_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}, \psi_{1h_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}, \beta_\nu$ и I_j таких, что выполняется система тождеств (8).*

Виды первого интеграла и последнего множителя системы (APCD) класса \mathfrak{A} определяются в соответствии с такими закономерностями.

Теорема 4. *Если дифференциальная система (APCD \mathfrak{A}) имеет первый интеграл*

$$\Phi: (t, x) \rightarrow F(w_1(x), \dots, w_{s+r}(x), K_{1h_1 1}(x), \dots, K_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(x),$$

$$\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_1(x), \dots, \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{s+r}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{s+r}(x),$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x)}, \dots, \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_{s+t}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_{s+t}(x)}, \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{1h_1 1}(x), \dots, \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(x), \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{1h_1 1}(x), \dots, \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{sh_{\varepsilon_s} f_{\varepsilon_s}}(x),$$

$$v_1(x), \dots, v_q(x) \Big) Z(t), \quad \forall (t, x) \in \tilde{\mathcal{P}},$$

где F и Z — некоторые голоморфные функции, построенный на основании автономных полиномиальных частных

интегралов (1) и (2) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (3)¹, то его можно представить в виде (5).

Доказательство построено на тех же принципах, что и доказательство теоремы 2.5.2.

Задача о модификации последнего множителя

$$\begin{aligned} \mu: (t, x) \rightarrow F\left(w_1(x), \dots, w_{s+r}(x), K_{1h_1 1}(x), \dots, K_{sh_{\epsilon_s} f_{\epsilon_s}}(x), \right. \\ \left. \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_1(x), \dots, \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{s+r}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{s+r}(x), \right. \\ \left. \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x)}, \dots, \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_{s+r}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_{s+r}(x)}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{1h_1 1}(x), \dots, \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{sh_{\epsilon_s} f_{\epsilon_s}}(x), \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{1h_1 1}(x), \dots, \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{sh_{\epsilon_s} f_{\epsilon_s}}(x),$$

$$v_1(x), \dots, v_q(x) \Big) Z(t), \forall (t, x) \in \mathcal{P},$$

системы (APCD \mathfrak{A}) такого, что система (APCD \mathfrak{A}) не имеет первых интегралов вида (9) и последнего множителя вида (10), которые построены на основании меньшего числа соответствующих функций (см. сноску 1) решается подобным образом.

Теорема 5. Если система (APCD \mathfrak{A}) имеет последний множитель (10), где F и Z — некоторые голоморфные функции, построенный на основании автономных полиномиальных частных интегралов (1) и (2) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (3), то его можно представить в виде (7).

Теоремы 4 и 5 позволяют отнести системы (APCD) класса \mathfrak{A} к дифференциальным системам типа Дарбу.

¹ Априори считая, что дифференциальная система (APCD \mathfrak{A}) не имеет первых интегралов вида (9), построенных на основании меньшего числа функций w_k ,

$$k = \overline{1, s+r}, K_{1h_1 1}, \dots, K_{sh_{\epsilon_s} f_{\epsilon_s}}, \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}} + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}, \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}}}, \mathfrak{k} = \overline{1, s+\mathfrak{k}},$$

$$\operatorname{Re} \mathfrak{K}_{1h_1 1}, \dots, \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{sh_{\epsilon_s} f_{\epsilon_s}}, \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{1h_1 1}, \dots, \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{sh_{\epsilon_s} f_{\epsilon_s}}, v_{\nu}, \nu = \overline{1, q}.$$

3. Построение первых интегралов и последних множителей

3.1. Системы (APCD) класса \mathfrak{A}

Достаточные условия построения неавтономного первого интеграла или последнего множителя. Достаточные условия построения автономного первого интеграла или последнего множителя.

При наличии некоторого числа автономных полиномиальных частных интегралов (1.2) и (2.2) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов (3.2) на их основании можно построить первый интеграл и последний множитель полиномиальной системы (APCD \mathfrak{A}). Это число прежде всего зависит от чисел n, m, p_1, \dots, p_m , по которым строим числа

$$\mathfrak{c} = \sum_{j=1}^m \mathfrak{c}_j, \quad \mathfrak{c}_j = \binom{n + p_j - 1}{n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Теорема 1. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c} - m$ имеет либо первый интеграл (5.2) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$, либо последний множитель (7.2).

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.2 функция (5.2) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD \mathfrak{A}) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (6.2).

А в соответствии с теоремой 3.2 функция (7.2) будет последним множителем системы (APCD \mathfrak{A}) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (8.2).

Система тождеств (8.2) при $\ell = \mathfrak{c} - m$ распадается на систему, которая состоит из \mathfrak{c} линейных, вообще говоря, неоднородных, уравнений с \mathfrak{c} неизвестными $\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \beta_{\nu}, I_j$; а система тождеств (6.2) при $\ell = \mathfrak{c} - m$ распадается на однородную систему \mathfrak{c} линейных уравнений с теми же \mathfrak{c} неизвестными.

Определители этих систем совпадают. Обозначим этот определитель Δ .

Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда система, соответствующая тождеству (8.2), имеет единственное решение; и скалярная функция (7.2), со-

ставленная на его основании, является последним множителем системы (APCD \mathfrak{A}).

Если $\Delta = 0$, то система, соответствующая тождеству (6.2), имеет нетривиальное решение; и скалярная функция (5.2), составленная на его основании, будет первым интегралом на $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD \mathfrak{A}). ■

В процессе доказательства теоремы 1, по сути дела, были доказаны следующие два утверждения.

Следствие 1. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c} - m$, когда определитель $\Delta = 0$, имеет первый интеграл (5.2).

Следствие 2. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c} - m$, когда определитель $\Delta \neq 0$, имеет последний множитель (7.2).

На случай автономного первого интеграла и автономного последнего множителя системы (APCD \mathfrak{A}) аналогично теореме 1 доказываем следующую

Теорема 2. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c}$ имеет либо автономный первый интеграл

$$F: x \rightarrow X(x) \exp Y(x), \forall x \in \mathcal{X}', \quad (1)$$

на области \mathcal{X}' , либо автономный последний множитель

$$\mu: x \rightarrow X(x) \exp Y(x), \forall x \in \mathcal{X}', \mathcal{X}' \subset \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Если через Λ обозначить определитель Δ на случай автономного первого интеграла (1) и автономного последнего множителя (2), то аналогами следствий 1 и 2 будут

Следствие 3. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c}$, когда определитель $\Lambda = 0$, имеет автономный первый интеграл (1).

Следствие 4. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c}$, когда определитель $\Lambda \neq 0$, имеет автономный последний множитель (2).

На основании теорем 1 и 2 с учётом свойства Якоби последних множителей получаем и такие закономерности.

Следствие 5. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c} - m + 1$ имеет первый интеграл (5.2) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$, который при $\Lambda = 0$ будет автономным (1) на области \mathcal{X}' .

Следствие 6. Система (APCD \mathfrak{A}) при $\ell = \mathfrak{c} + 1$ имеет автономный первый интеграл (1) на области \mathcal{X}' .

3.2. Системы (IAPCD) класса \mathfrak{A}

Достаточные условия построения первого интеграла. Достаточные условия построения первого интеграла или последнего множителя.

Если система (APCD \mathfrak{A}) является вполне разрешимой, то условия, достаточные для построения первого интеграла и последнего множителя, в подавляющем числе случаев могут быть ослаблены.

Система (APCD) индуцирует m автономных дифференциальных систем n -го порядка

$$dx = P^j(x) dt_j, \quad (\text{APD}j) \quad (3.2)$$

где вектор-полином $P^j(x) = \text{colon}(P_{1j}(x), \dots, P_{nj}(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, является j -м столбцом $(n \times m)$ -матрицы P , $j = \overline{1, m}$.

Вполне очевидно, если основываться на соответствующих определениях, такие закономерности относительно интегральных связей системы (APCD) и систем (APD j), $j = \overline{1, m}$.

Предложение 1. Если система (APCD) имеет:

а) автономный первый интеграл F на области \mathcal{X}' из пространства \mathbb{R}^n ;

б) автономный полиномиальный частный интеграл $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с кратностью \mathfrak{x} ;

в) автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с кратностью \mathfrak{z} ;

г) автономный условный частный интеграл ω ,

то и каждая автономная обыкновенная дифференциальная система (APD j), $j = \overline{1, m}$, имеет:

а) автономный первый интеграл F на области \mathcal{X}' ;

б) автономный полиномиальный частный интеграл $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с кратностью \mathfrak{x} ;

в) автономный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл $\mathfrak{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с кратностью \mathfrak{z} ;

г) автономный условный частный интеграл ω .

Для системы (IAPCD) имеют место следующие возможности построения первого интеграла по её автономным частным интегралам (1.2) – (3.2).

Теорема 3. Пусть у системы (IAPCD \mathfrak{A}) число $\ell = \mathfrak{c}_k$, $k \in \{1, \dots, m\}$, а система (APD k) не имеет автономных первых интегралов

$$\Xi_j: x \rightarrow \Xi_j(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, j \neq k, \quad (3)$$

на пространстве \mathbb{R}^n . Тогда функция (5.2) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (IAPCD \mathfrak{A}).

Доказательство. Если $\ell = \mathfrak{c}_k$, то на основании следствия 5 при $m = 1$ устанавливаем, что функция

$$F_k: (t_k, x) \rightarrow X(x) \exp(I_k t_k + Y(x)), \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}', \quad (4)$$

является первым интегралом системы (APD k) и

$$\mathfrak{P}_k(t_k, x)(X(x) \exp(I_k t_k + Y(x))) = 0, \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}'. \quad (5)$$

На области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ действия операторов

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_j(t_j, x)(X(x) \exp(I_k t_k + Y(x))) = \\ & = X(x) \exp(I_k t_k + Y(x)) \Xi_j(x), j = \overline{1, m}, j \neq k. \end{aligned} \quad (6)$$

Основываясь на полной разрешимости системы (IAPCD \mathfrak{A}), непосредственным вычислением действий оператора \mathfrak{P}_k , $k \neq j$, на обе части каждого из тождеств (6) с учётом условий Фробениуса и тождества (5), получаем, что

$$\mathfrak{p}_k \Xi_j(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, j \neq k. \quad (7)$$

Однако система (APD k) не имеет первых интегралов (3), поэтому из тождеств (7) следует, что

$$\Xi_j(x) = -I_j, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, j \neq k. \quad (8)$$

Стало быть, при (8) имеет место система тождеств

$$\mathfrak{P}_j(t_j, x)(X(x) \exp(I t + Y(x))) = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', j = \overline{1, m},$$

которая означает, что функция (5.2) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (IAPCD \mathfrak{A}). ■

Теорема 4. Пусть у системы (IAPCD \mathfrak{A}) число $\ell = \mathfrak{c}_k - 1$, $k \in \{1, \dots, m\}$, а система (APD k) не имеет на пространстве \mathbb{R}^n автономных первых интегралов (3) и

$$\Psi_j: x \rightarrow \Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathbf{p}_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq k, \quad (9)$$

Тогда система (IAPCD \mathfrak{A}) имеет либо первый интеграл (5.2) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$, либо последний множитель (7.2).

Доказательство. Предварительно заметим, что на \mathbb{R}^n имеет место импликация

$$[\mathbf{p}_j(x), \mathbf{p}_k(x)] = 0 \implies \mathbf{p}_j \operatorname{div} \mathbf{p}_k(x) = \mathbf{p}_k \operatorname{div} \mathbf{p}_j(x). \quad (10)$$

Пусть автономная обыкновенная дифференциальная система (APD k) такова, что $\ell = \mathfrak{c}_k - 1$.

В силу теоремы 1 при $m = 1$ задача по построению первого интеграла (4) и последнего множителя

$$\mu: (t_k, x) \rightarrow X(x) \exp(I_k t_k + Y(x)), \quad \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}', \quad (11)$$

системы (APD k) сводится к разрешению систем линейных уравнений, построенных на основании тождеств (5) и

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_k(t_k, x)(X(x) \exp(I_k t_k + Y(x))) = \\ & = - (X(x) \exp(I_k t_k + Y(x))) \operatorname{div} \mathbf{p}_k(x), \quad \forall (t_k, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}', \end{aligned} \quad (12)$$

соответственно. При этом определители этих систем будут одинаковыми порядка \mathfrak{c}_k . Обозначим его Δ_k .

Пусть определитель $\Delta_k \neq 0$.

Тогда в соответствии со следствием 2 при $m = 1$ система (APD k) имеет последний множитель (11), а значит, выполняется система тождеств (12).

Предположим, что обыкновенная дифференциальная система (APD k) не имеет первых интегралов (9).

Основываясь на полной разрешимости системы (IAPCD \mathfrak{A}), непосредственным вычислением действий оператора \mathfrak{P}_k , $k \neq j$, на обе части каждого из тождеств (6) с учётом условий Фробениуса, условия (12) и импликации (10) получаем, что

$$\mathfrak{p}_k(\Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, j \neq k.$$

Отсюда следуют тождества

$$\Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x) = -I_j, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, j \neq k, I_j = \operatorname{const},$$

ибо система (APD \mathfrak{k}) не имеет первых интегралов (9).

Поэтому на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_j(t, x)(X(x) \exp(I_k t_k + Y(x))) = \\ & = - (I_j + \operatorname{div} \mathfrak{p}_j(x)) X(x) \exp(I_k t_k + Y(x)), j = \overline{1, m}, j \neq k, \end{aligned}$$

и функция (7.2) есть последний множитель системы (IAPCD \mathfrak{A}).

При $\Delta_k = 0$ подобным образом доказываем, что функция (5.2) является первым интегралом на $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ дифференциальной системы (IAPCD \mathfrak{A}). ■

Следствие 7. Если выполняются условия теоремы 4 и определитель $\Delta_k \neq 0$, то функция (7.2) является последним множителем системы (IAPCD \mathfrak{A}).

Следствие 8. Если выполняются условия теоремы 4 и определитель $\Delta_k = 0$, то функция (5.2) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (IAPCD \mathfrak{A}).

Пример 1. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned} dx_1 &= 2x_1x_2 dt_1 + (-x_1^2 + x_2^2) dt_2, \\ dx_2 &= (-x_1^2 + x_2^2) dt_1 - 2x_1x_2 dt_2 \end{aligned} \tag{13}$$

имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1: x \rightarrow x_1 + ix_2, \quad \mathfrak{w}_2: x \rightarrow x_1 - ix_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

с функциями

$$\mathfrak{W}_{11}: x \rightarrow x_2 - ix_1, \quad \mathfrak{W}_{12}: x \rightarrow -x_1 - ix_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_{21}: x \rightarrow x_2 + ix_1, \quad \mathfrak{W}_{22}: x \rightarrow -x_1 + ix_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Число $\ell = 2$.

Для обыкновенной дифференциальной системы (APD1)

$$\frac{dx_1}{dt_1} = 2x_1x_2, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = -x_1^2 + x_2^2$$

число $\mathfrak{c}_1 = \binom{2+2-1}{2} = 3$, а значит, $\ell = \mathfrak{c}_1 - 1$.

Эта система не имеет первым интегралом функцию

$$F: x \rightarrow -2\eta_1x_1 + \alpha_1x_2 - 4x_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

составленную по семейству (9), определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

В соответствии со следствием 7 рациональная функция

$$\mu: x \rightarrow \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

является последним множителем системы (13).

3.3. Специальные случаи

Построение неавтономного первого интеграла по одному автономному полиномиальному или условному частным интегралам. Построение автономных первых интегралов по двум автономным полиномиальным частным интегралам.

На основании автономных полиномиальных частных интегралов (вещественных и комплекснозначных) с учётом их кратностей и автономных условных частных интегралов строятся первые интегралы системы (APCD \mathfrak{A}) в следующих случаях.

Теорема 5. Пусть y системы (APCD \mathfrak{A}):

1) для автономного полиномиального частного интеграла $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в тождествах

$$\mathfrak{p}_j w(x) = w(x) W_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

полиномы $W_j, j = \overline{1, m}$, есть тождественные постоянные;

2) для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла $\mathfrak{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ в тождествах

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}(x) = \mathfrak{w}(x) \mathfrak{W}_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (14)$$

полиномы $\operatorname{Re} \mathfrak{W}_j, j = \overline{1, m}$, являются тождественными постоянными;

3) для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла $\mathfrak{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ в тождествах (14) полиномы $\operatorname{Im} \mathfrak{W}_j, j = \overline{1, m}$, являются тождественными постоянными;

4) для автономного полиномиального частного интеграла $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ кратности \varkappa в тождествах

$$\mathfrak{p}_j K_{h_\xi g_\xi}(x) = R_{h_\xi g_\xi j}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad \xi = \overline{1, \varepsilon}, \quad h_\xi \in \mathbb{N}, \quad g_\xi = \overline{1, f_\xi},$$

при фиксированных h_ξ и g_ξ полиномы $R_{h_\xi g_\xi j}, j = \overline{1, m}$, являются тождественными постоянными;

5) для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла $\mathfrak{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с кратностью \mathfrak{z} в тождествах

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (15)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad \zeta = \overline{1, \mathfrak{e}}, \quad \mathfrak{h}_\zeta \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_\zeta = \overline{1, \mathfrak{f}_\zeta},$$

при фиксированных \mathfrak{h}_ζ и \mathfrak{g}_ζ полиномы $\operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}, j = \overline{1, m}$, являются тождественными постоянными;

6) для комплекснозначного автономного полиномиального частного интеграла $\mathfrak{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ с кратностью \mathfrak{z} в тождествах (15) при фиксированных \mathfrak{h}_ζ и \mathfrak{g}_ζ полиномы $\text{Im } \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}$, $j = \overline{1, m}$, есть тождественные постоянные;

7) для условного частного интеграла $\omega: x \rightarrow \exp v(x)$ в тождествах

$$\mathfrak{p}_j v(x) = S_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

полиномы S_j , $j = \overline{1, m}$, суть тождественные постоянные.

Тогда существует постоянный вектор $I = (I_1, \dots, I_m)$, $I_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, такой, что функция:

- 1) $F: (t, x) \rightarrow w(x) \exp It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$;
- 2) $F: (t, x) \rightarrow (\text{Re}^2 \mathfrak{w}(x) + \text{Im}^2 \mathfrak{w}(x)) \exp It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$;
- 3) $F: (t, x) \rightarrow \text{arctg} \frac{\text{Im } \mathfrak{w}(x)}{\text{Re } \mathfrak{w}(x)} + It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$;
- 4) $F: (t, x) \rightarrow K_{h_\xi g_\xi}(x) + It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$;
- 5) $F: (t, x) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) + It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$;
- 6) $F: (t, x) \rightarrow \text{Im } \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(x) + It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$;
- 7) $F: (t, x) \rightarrow v(x) + It, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$,

будет первым интегралом системы (APCDA) соответственно.

Доказательство является непосредственным следствием определений 1.1, 3.1, 4.1, 5.1.

Пример 2 (продолжение примера 1.1.2.1). Автономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах (3.1.2.1) имеет такой 1-цилиндричный автономный полиномиальный частный интеграл

$$w: x \rightarrow x_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

что

$$dx_1|_{(3.1.2.1)} = x_1(dt_1 + 3dt_2), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 1) теоремы 5 система (3.1.2.1) имеет на пространстве \mathbb{R}^4 первый интеграл (4.1.2.1), который образует базис первых интегралов системы (3.1.2.1) ввиду её не полной разрешимости (см. § 4, гл. 1).

Пример 3. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - x_2^3) dt_1 + x_1(2 + x_2^2) dt_2, \\ dx_2 &= x_2(1 + x_1x_2) dt_1 + x_2(2 - x_1^2) dt_2 \end{aligned} \quad (16)$$

имеет комплекснозначный автономный частный интеграл

$$\mathfrak{w}: x \rightarrow x_1 + i x_2, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad (17)$$

такой, что полный дифференциал в силу системы (16) на \mathbb{R}^4

$$d(x_1 + i x_2)|_{(16)} = (x_1 + i x_2)((1 + i x_2^2) dt_1 + (2 - i x_1x_2) dt_2).$$

Поэтому в соответствии с утверждением 2) теоремы 5 система (16) имеет первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow (x_1^2 + x_2^2) \exp(-2(t_1 + 2t_2)), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4.$$

Если учесть, что скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = x_2(2x_1 + 4x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3)(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}), \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и, следовательно, для системы (16) не выполняются условия Фробениуса, то в соответствии с теоремой 1.0.4.1 построенный первый интеграл образует базис первых интегралов на пространстве \mathbb{R}^4 системы (16).

Пример 4. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2(x_1 - 1) dt_1 + x_2(x_1 - 2) dt_2, \\ dx_2 &= (x_1 + x_2^2) dt_1 + (2x_1 + x_2^2) dt_2 \end{aligned} \quad (18)$$

имеет комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (17) с функциями

$$\mathfrak{M}_1: x \rightarrow x_2 + i, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_2: x \rightarrow x_2 + 2i, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

В соответствии с утверждением 3) теоремы 5 функция

$$F: (t, x) \rightarrow t_1 + 2t_2 - \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

является первым интегралом системы (18) на любой области \mathcal{D} из множества $\mathbb{R}^4 \setminus \{(t, x): x_1 = 0\}$.

Для системы (18) не выполняются условия Фробениуса, так как скобки Пуассона

$$[\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = -x_1^2 \partial_{x_1} - x_1 x_2 \partial_{x_2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

не являются нуль-оператором на плоскости \mathbb{R}^2 .

Поэтому построенный первый интеграл составляет базис первых интегралов на любой области \mathcal{D} из $\mathbb{R}^4 \setminus \{(t, x): x_1 = 0\}$ системы (18) (по теореме 1.0.4.1).

Пример 5. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - x_2 + x_1^2) dt_1 + (x_1 - 2x_2 + 2x_1^2) dt_2, \\ dx_2 &= x_2(1 + x_1) dt_1 + x_2(1 + 2x_1) dt_2 \end{aligned} \tag{19}$$

имеет 1-цилиндричный автономный полиномиальный частный интеграл

$$w: x \rightarrow x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

кратности $\varkappa = 2$ такой, что

$$dx_2|_{(19)} = x_2((1 + x_1) dt_1 + (1 + 2x_1) dt_2), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

$$d\frac{x_1}{x_2}|_{(19)} = -(dt_1 + 2dt_2), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}', \quad \mathcal{X}' = \{(x_1, x_2): x_2 \neq 0\}.$$

Поэтому в соответствии с утверждением 4) теоремы 5 система (19) имеет первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow \frac{x_1}{x_2} + t_1 + 2t_2, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

который составляет её базис первых интегралов на любой области \mathcal{D} , содержащейся в множестве $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}'$ (по теореме 1.0.4.1, ввиду того, что скобки Пуассона

$$[\mathbf{p}_1(x), \mathbf{p}_2(x)] = x_1(4 - 3x_1)\partial_{x_1} + x_1x_2\partial_{x_2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

не являются нуль-оператором на \mathbb{R}^2).

Пример 6 (продолжение примера 4.1). У системы уравнений в полных дифференциалах (17.1) комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (17) кратности $\mathfrak{z} = 2$ такой, что имеют место представления (18.1).

Поэтому в соответствии с утверждением 5) теоремы 5 система (17.1) имеет первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + t_1 + 2t_2, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

который образует её базис первых интегралов на любой области \mathcal{D} из множества $\mathbb{R}^2 \times \{x: x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ (по теореме 1.0.4.1, так как скобки Пуассона

$$[\mathbf{p}_1(x), \mathbf{p}_2(x)] = (2x_1^4 - x_1^4x_2 + 2x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 + 2x_2^4 + x_2^5)\partial_{x_1} + \\ + 2x_1x_2(2x_1^2 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - x_2^3)\partial_{x_2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

не являются нуль-оператором на плоскости \mathbb{R}^2).

Пример 7 (продолжение примера 5.1). У системы уравнений в полных дифференциалах (19.1) комплекснозначный автономный полиномиальный частный интеграл (17) кратности $\mathfrak{z} = 2$ такой, что имеют место представления (20.1).

Поэтому в соответствии с утверждением 6) теоремы 5 система (19.1) имеет 1-неавтономный первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + t_2, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

который образует её базис первых интегралов на любой области \mathcal{D} из множества $\mathbb{R}^2 \times \{x: x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ (по теореме 1.0.4.1, ввиду того, что система (19.1) не является вполне разрешимой:

$$[\mathbf{p}_1(x), \mathbf{p}_2(x)] = (-x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^4x_2 - x_2^4 - x_2^5)\partial_{x_1} + \\ + 2x_1x_2(-x_1^2 + x_1^2x_2 + x_2^2 + x_2^3)\partial_{x_2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2).$$

Пример 8 (продолжение примера 6.1). Система уравнений в полных дифференциалах (22.1) имеет автономный условный частный интеграл (23.1) при (24.1).

Поэтому в соответствии с утверждением 7) теоремы 5 система (22.1) имеет первый интеграл на пространстве \mathbb{R}^4

$$F: (t, x) \rightarrow x_1 - x_2 - t_1 - 2t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4,$$

который образует её базис первых интегралов на пространстве \mathbb{R}^4 (по теореме 1.0.4.1, ввиду того, что скобки Пуассона

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{p}_1(x), \mathfrak{p}_2(x)] = \\ & = (-2 + x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - x_1x_2^2 + x_2^3)(\partial_{x_2} + \partial_{x_2}), \forall x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

не являются нуль-оператором на плоскости \mathbb{R}^2).

На автономный случай аналогом свойства 7.2.2 является

Свойство 1. Если автономные полиномиальные частные интегралы $w_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ системы (APCD) таковы, что производные Ли в силу системы (APCD) от них связаны соотношениями

$$\frac{\mathfrak{p}_j w_1(x)}{\mathfrak{p}_j w_2(x)} = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}, \forall x \in \mathcal{X}_2, j = \overline{1, m},$$

то функция

$$F: x \rightarrow \frac{w_1(x)}{w_2(x)}, \forall x \in \mathcal{X}_2,$$

является автономным первым интегралом на области \mathcal{X}_2 системы (APCD).

Для комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов имеют место следующие закономерности.

Свойство 2. Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{w}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ системы (APCD) таковы, что в тождествах

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}_1(x) = \mathfrak{w}_1(x) \mathfrak{W}_{1j}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, \quad (20)$$

и

$$\mathfrak{p}_j \mathfrak{w}_2(x) = \mathfrak{w}_2(x) \mathfrak{W}_{2j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (21)$$

полиномы

$$\mathfrak{W}_{1j}(x) = \mathfrak{W}_{2j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Тогда функции

$$F_1: x \rightarrow \frac{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_2(x)} \quad (23)$$

и

$$F_2: x \rightarrow \frac{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_2(x)} \quad (24)$$

являются автономными первыми интегралами на области $\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n$, системы (APCD).

Доказательство. Как и при доказательстве свойства 7.2.2 устанавливаем, что для полиномов \mathfrak{w}_1 и \mathfrak{w}_2 (со свойством (22) в тождествах (20) и (21)) имеют место тождества

$$\mathfrak{p}_j \frac{\mathfrak{w}_1(x)}{\mathfrak{w}_2(x)} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \quad j = \overline{1, m},$$

или

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re} \frac{\mathfrak{w}_1(x)}{\mathfrak{w}_2(x)} = 0, \quad \mathfrak{p}_j \operatorname{Im} \frac{\mathfrak{w}_1(x)}{\mathfrak{w}_2(x)} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \quad j = \overline{1, m}.$$

Поэтому функции (23) и (24) являются автономными первыми интегралами на области \mathcal{X}_2 системы (APCD). ■

Свойство 3. Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{w}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ системы (APCD) таковы, что в тождествах (20) и (21) полиномы $\mathfrak{W}_{1j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{W}_{2j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, связаны соотношениями

$$\operatorname{Re} \mathfrak{W}_{1j}(x) = \operatorname{Re} \mathfrak{W}_{2j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Тогда функция

$$F: x \rightarrow \frac{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_2(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \quad (26)$$

является автономным первым интегралом на области \mathcal{X}_2 пространства \mathbb{R}^n системы (APCD).

Доказательство. В соответствии со свойством 2.1 полиномы

$$p_\theta: x \rightarrow \operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_\theta(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_\theta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \theta = 1, 2,$$

являются автономными полиномиальными частными интегралами системы (APCD), для которых выполняется система тождеств (8.1) при $p = p_\theta$, $\theta = 1, 2$.

Если учесть соотношения (25), то получим, что

$$\frac{\mathfrak{p}_j p_1(x)}{\mathfrak{p}_j p_2(x)} = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \quad j = \overline{1, m}.$$

Отсюда, по свойству 1, заключаем, что функция (26) является автономным первым интегралом на области \mathcal{X}_2 . ■

Свойство 4. Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{w}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ системы (APCD) таковы, что в тождествах (20) и (21) полиномы $\mathfrak{W}_{1j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{W}_{2j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, связаны соотношениями

$$\operatorname{Im} \mathfrak{W}_{1j}(x) = \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{2j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (27)$$

Тогда автономным первым интегралом на области \mathcal{X}_2 пространства \mathbb{R}^n системы (APCD) будет функция

$$F: x \rightarrow \frac{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x)}. \quad (28)$$

Доказательство. В соответствии со свойством 3.1 и следующими из него тождествами (11.1) для функций аргумента полиномов \mathfrak{w}_1 и \mathfrak{w}_2 на области \mathcal{X} имеем, что

$$p_j(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{1j}(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{2j}(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Поэтому функция

$$F: x \rightarrow \arctg \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x)} - \arctg \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

является автономным первым интегралом на области \mathcal{X} системы (APCD). Используя тригонометрические преобразования, эту функцию приводим к виду (28). ■

Заметим, что первые интегралы (23) и (24) при выполнении условий свойства 2 могут быть получены посредством первых интегралов (26) и (28) из свойств 3 и 4.

На автономный случай аналогом свойства 8.2.2 является

Свойство 5. Если автономные полиномиальные частные интегралы $w_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $w_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ системы (APCD) таковы, что

$$\frac{p_j w_1(x)}{p_j w_2(x)} = - \frac{w_1(x)}{w_2(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

то функция

$$F: x \rightarrow w_1(x)w_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является автономным первым интегралом на пространстве \mathbb{R}^n системы (APCD).

Для комплекснозначных автономных полиномиальных частных интегралов имеют место следующие закономерности.

Свойство 6. Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{w}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ системы (APCD) таковы, что в тождествах (20) и (21) полиномы

$$\mathfrak{W}_{1j}(x) = - \mathfrak{W}_{2j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда функция

$$F_1: x \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

а также функция

$$F_2: x \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

являются автономными первыми интегралами на пространстве \mathbb{R}^n системы (APCD).

Доказательство. Как и при доказательстве свойства 8.2.2 устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_j(\mathfrak{w}_1(x) \mathfrak{w}_2(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m},$$

или что

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re}(\mathfrak{w}_1(x) \mathfrak{w}_2(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m},$$

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Im}(\mathfrak{w}_1(x) \mathfrak{w}_2(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}.$$

Отсюда следует, что функции F_1 и F_2 являются автономными первыми интегралами на \mathbb{R}^n системы (APCD). ■

Свойство 7. Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{w}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ системы (APCD) таковы, что в тождествах (20) и (21) полиномы $\mathfrak{W}_{1j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{W}_{2j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, j = \overline{1, m}$, связаны соотношениями

$$\operatorname{Re} \mathfrak{W}_{1j}(x) = -\operatorname{Re} \mathfrak{W}_{2j}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}.$$

Тогда полином

$$P: x \rightarrow (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_1(x)) (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_2(x))$$

является автономным первым интегралом на пространстве \mathbb{R}^n системы (APCD).

Доказательство. В соответствии со свойством 2.1 частное производных Ли

$$\frac{p_j(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_1(x))}{p_j(\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_2(x))} =$$

$$= -\frac{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_1(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re}^2 \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{w}_2(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \quad j = \overline{1, m}.$$

По свойству 5 заключаем, что имеет место свойство 7. ■

Свойство 8. Пусть комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{w}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ системы (APCD) таковы, что в тождествах (20) и (21) полиномы $\mathfrak{W}_{1j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $\mathfrak{W}_{2j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, связаны соотношениями

$$\operatorname{Im} \mathfrak{W}_{1j}(x) = -\operatorname{Im} \mathfrak{W}_{2j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда функция

$$F: x \rightarrow \frac{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x) + \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x) - \operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x) \operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

является автономным первым интегралом на области \mathcal{X} из пространства \mathbb{R}^n системы (APCD).

Доказательство аналогично доказательству свойства 4 с той лишь разницей, что

$$p_j(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m},$$

и, следовательно, автономным первым интегралом на области \mathcal{X} системы (APCD) будет функция

$$F: x \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_1(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_1(x)} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{w}_2(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{w}_2(x)}. \quad \blacksquare$$

Свойство 9. Пусть система (APCD) имеет автономный условный частный интеграл

$$E: x \rightarrow \exp v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

а производные Ли функции $u: x \rightarrow u(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, в силу системы (APCD) равны

$$\mathfrak{p}_j u(x) = -u(x)S_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m},$$

где полиномы S_j , $j = \overline{1, m}$, определяются тождествами (21.1). Тогда функция

$$F: x \rightarrow u(x) \exp v(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

является автономным первым интегралом на области \mathcal{X} системы (APCD).

Действительно, производные Ли

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j F(x) &= \exp v(x) \mathfrak{p}_j u(x) + u(x) \exp v(x) \mathfrak{p}_j v(x) = \\ &= \exp v(x) (-u(x)S_j(x) + u(x)S_j(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}. \blacksquare \end{aligned}$$

В частности, справедливо

Свойство 10. Если система (APCD) имеет автономный условный частный интеграл

$$E: x \rightarrow \exp v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

и автономный полиномиальный частный интеграл

$$w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

такие, что

$$\mathfrak{p}_j v(x) = S_j(x), \quad \mathfrak{p}_j w(x) = -w(x)S_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

то функция

$$F: x \rightarrow w(x) \exp v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является первым интегралом на \mathbb{R}^n системы (APCD).

Теорема 6. Пусть обыкновенная дифференциальная система (APD λ) имеет неавтономный первый интеграл

$$F_\lambda: (t_\lambda, x) \rightarrow w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda), \quad \forall (t_\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}, \quad (29)$$

и не имеет на $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ первых интегралов

$$F_j: (t_\lambda, x) \rightarrow \mathfrak{P}_j w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda), \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \lambda. \quad (30)$$

Тогда система (IAPCD) имеет неавтономный первый интеграл

$$F: (t, x) \rightarrow w_\lambda(x) \exp \sum_{j=1}^m a_j t_j, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \quad (31)$$

где \mathcal{X} есть область из фазового пространства \mathbb{R}^n , а числа $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $a_\lambda = -1$.

Доказательство. Функция (29) является первым интегралом системы (APD λ), поэтому

$$\mathfrak{P}_\lambda w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda) = 0, \quad \forall (t_\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}. \quad (32)$$

Из того, что

$$w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda) = C_\lambda,$$

получаем

$$w_\lambda(x) = C_\lambda \exp t_\lambda. \quad (33)$$

В силу полной разрешимости скобки Пуассона

$$[\mathfrak{P}_j(t, x), \mathfrak{P}_\lambda(t, x)] = \mathfrak{D}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad j = \overline{1, m},$$

и на основании тождества (32) получаем:

$$\mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{P}_j w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda) = \mathfrak{P}_j \mathfrak{P}_\lambda w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda) = 0,$$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \lambda.$$

Так как дифференциальная система (APD λ) не имеет первых интегралов (30), то на $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}$ получаем

$$\mathfrak{P}_j w_\lambda(x) \exp(-t_\lambda) = C_j, \quad C_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \lambda.$$

Отсюда, учитывая (33), имеем:

$$\mathfrak{P}_j w_\lambda(x) = C_j \exp t_\lambda = \frac{C_j}{C_\lambda} C_\lambda \exp t_\lambda = \frac{C_j}{C_\lambda} w_\lambda(x) = -a_j w_\lambda(x),$$

$$\forall(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \quad a_j = -\frac{C_j}{C_\lambda}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \lambda.$$

Следовательно, на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}$

$$\mathfrak{P}_j w_\lambda(x) = -a_j w_\lambda(x), \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \lambda. \quad (34)$$

Тогда с учётом (34)

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_j \left(w_\lambda(x) \exp \sum_{\zeta=1}^m a_\zeta t_\zeta \right) = \\ &= \mathfrak{P}_j w_\lambda(x) \exp \sum_{\zeta=1}^m a_\zeta t_\zeta + w_\lambda(x) \mathfrak{P}_j \exp \sum_{\zeta=1}^m a_\zeta t_\zeta = \\ &= -a_j w_\lambda(x) \exp \sum_{\zeta=1}^m a_\zeta t_\zeta + a_j w_\lambda(x) \exp \sum_{\zeta=1}^m a_\zeta t_\zeta = 0, \end{aligned}$$

$$\forall(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \lambda.$$

Отсюда и тождества (32) следует, что система (IAPCD) имеет первый интеграл (31). ■

4. Интегральные точки

Интегральная точка. Вес интегральной точки. Достаточные условия построения неавтономного первого интеграла. Достаточные условия построения автономного первого интеграла. Достаточные условия построения неавтономного первого интеграла или последнего множителя. Достаточные условия построения автономного первого интеграла или последнего множителя.

4.1. Системы (APCD) класса \mathfrak{B}

Определение 1. Для системы (APCD \mathfrak{A}) точку $A_\lambda(x^\lambda)$ фазового пространства \mathbb{C}^n назовём **интегральной точкой** веса ρ_λ по базе $\theta_\lambda = \{\theta_{\lambda 1}, \dots, \theta_{\lambda \rho_\lambda}\}$, если при $1 \leq \rho_\lambda \leq m$ выполняются условия

$$\begin{aligned} W_{k\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) &= 0, \quad R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} \theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \\ \operatorname{Im} \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) &= 0, \quad \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l} \theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \\ \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{\mathfrak{h}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l} \theta_{\lambda j}}(x^\lambda) &= 0, \quad S_{\nu\theta_{\lambda j}}(x^\lambda) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$k = \overline{1, s + r}, \quad l = \overline{1, s}, \quad \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}, \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}}, \quad \mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}},$$

$$\mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}, \quad \zeta_l = \overline{1, \mathfrak{e}_l}, \quad \mathfrak{h}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_l} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_l}}, \quad \nu = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, \rho_\lambda}.$$

Пусть система (APCD \mathfrak{A}) имеет N интегральных точек $A_\lambda(x^\lambda)$ соответственно с весами $\rho_\lambda \geq 1$ по базам

$$\theta_\lambda = \{\theta_{\lambda 1}, \dots, \theta_{\lambda \rho_\lambda}\}, \quad \lambda = \overline{1, N}.$$

Поставим в соответствие каждой интегральной точке $A_\lambda(x^\lambda)$ столбцы матрицы P :

$$P^{\theta_\lambda}(x) = (P_{1\theta_\lambda}(x), \dots, P_{n\theta_\lambda}(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через U множество индексов тех столбцов матрицы P , каждому из которых соответствует хотя бы одна интегральная точка $A_\lambda(x^\lambda)$ с весом $\rho_\lambda \geq 1$; через \mathfrak{u} — количество элементов множества U ; через $I_{(U)} = (I_1, \dots, I_m)$, где $I_j \in \mathbb{C}$, причём, если $j \in U$, то $I_j = 0$.

Для каждого столбца P^j , $j \in U$, составим матрицу из единиц и координат $x^\lambda = (x_{1\lambda}, \dots, x_{n\lambda})$ интегральных точек $A_\lambda(x^\lambda)$, соответствующих этому столбцу, следующим образом: каждая строка этой матрицы имеет вид

$$\left(1, x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \dots, x_{n\lambda}, x_{1\lambda}^2, x_{1\lambda}x_{2\lambda}, \dots, x_{n\lambda}^2, x_{1\lambda}^3, \dots, x_{n\lambda}^{p_j-1}\right),$$

состоит из \mathfrak{c}_j элементов, и всего в матрице s_j строк, где s_j — количество точек A_λ , соответствующих столбцу P^j . Обозначим эту матрицу a_j . Она имеет размер $s_j \times \mathfrak{c}_j$ и ранг $\text{rank } a_j = r_j$.

На основании матрицы a_j построим матрицу b_j , размер которой $r_j \times \mathfrak{c}_j$ и ранг $\text{rank } b_j = r_j$.

Для интегральных точек A_λ , $\lambda = \overline{1, N}$, введём число

$$\mathfrak{b} = \sum_{j \in U} r_j.$$

Если у системы (APCD \mathfrak{A}) существуют интегральные точки $A_\lambda(x^\lambda)$, $\lambda = \overline{1, N}$, с весами ρ_λ и числом $\mathfrak{b} \geq 0$, то будем говорить, что система (APCD \mathfrak{A}) принадлежит классу \mathfrak{B} и обозначать (APCD \mathfrak{B}).

4.2. Интегралы систем (APCD \mathfrak{B})

Теорема 1. Система (APCD \mathfrak{B}) при $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m + 1$ имеет на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ первый интеграл

$$W: (t, x) \rightarrow X(x) \exp(I_{(U)}t + Y(x)). \quad (2)$$

Доказательство. Функция (2) в силу тождеств (4.2) будет первым интегралом системы (APCD \mathfrak{B}) тогда и только тогда, когда

$$\Xi(x) + I_{(U)} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Обозначим через c_j квадратную матрицу порядка r_j с определителем, отличным от нуля, полученную из $(r_j \times c_j)$ -матрицы b_j вычёркиванием $c_j - r_j$ столбцов, $j \in U$. Через $W^k, R^l_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \mathfrak{W}^{\mathfrak{k}}, \mathfrak{R}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}, S^\nu$ обозначим векторы-полиномы, которые образованы соответственно из векторов-полиномов

$$W^k(x) = (W_{k1}(x), \dots, W_{km}(x)),$$

$$R^l_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) = (R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} 1}(x), \dots, R_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l} m}(x)),$$

$$\mathfrak{W}^{\mathfrak{k}}(x) = (\mathfrak{W}_{\mathfrak{k}1}(x), \dots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{k}m}(x)),$$

$$\mathfrak{R}^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{h}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}(x) = (\mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l} 1}(x), \dots, \mathfrak{R}_{\mathfrak{l}\mathfrak{h}_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l} m}(x)),$$

$$S^\nu(x) = (S_{\nu 1}(x), \dots, S_{\nu m}(x)),$$

$$k = \overline{1, s + r}, l = \overline{1, s}, \xi_l = \overline{1, \varepsilon_l}, h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, g_{\xi_l} = \overline{1, f_{\xi_l}},$$

$$\mathfrak{k} = \overline{1, \mathfrak{s} + \mathfrak{r}}, \mathfrak{l} = \overline{1, \mathfrak{s}}, \zeta_l = \overline{1, \mathfrak{e}_l}, \mathfrak{h}_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \mathfrak{g}_{\zeta_l} = \overline{1, \mathfrak{f}_{\zeta_l}}, \nu = \overline{1, q},$$

следующим образом.

Если $j \notin U$, то j -я компонента исходного вектора-полинома остаётся без изменения, а если $j \in U$, то j -я компонента исходного вектора-полинома изменяется так, что коэффициенты при степенях переменных x , соответствующих степеням x^λ в $(r_j \times r_j)$ -матрице c_j , берутся равными нулю, а коэффициенты при остальных степенях x остаются без изменения.

Система

$$\Xi^*(x) + I_{(U)} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где функция

$$\begin{aligned}
 \Xi^*: x \rightarrow & \sum_{k=1}^{s+r} \gamma_k^* W^k(x) + \sum_{l=1}^s \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{f_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}^* R_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}^l(x) + \\
 & + 2 \sum_{\mathfrak{k}=1}^{s+r} \eta_{\mathfrak{k}}^* \operatorname{Re} \mathfrak{W}^{\mathfrak{k}}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{s+r} \tau_{\mathfrak{k}}^* \operatorname{Im} \mathfrak{W}^{\mathfrak{k}}(x) + \sum_{\nu=1}^q \beta_{\nu}^* S^{\nu}(x) + \\
 & + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{f_{\zeta_l}} \varphi_{lh_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{R}_{h_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}^{\mathfrak{l}*}(x) + \\
 & + \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\mathfrak{e}_l} \sum_{\mathfrak{g}_{\zeta_l}=1}^{f_{\zeta_l}} \psi_{lh_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{R}_{h_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}^{\mathfrak{l}*}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,
 \end{aligned}$$

распадается на систему, которая при $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m + 1$ состоит из $\mathfrak{c} - \mathfrak{b}$ линейных уравнений с $\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + 1$ неизвестными.

Такая система всегда имеет нетривиальное решение

$$\begin{aligned}
 I_j &= I_j^*, \quad \gamma_k = \gamma_k^*, \quad \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} = \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}^*, \quad \eta_{\mathfrak{k}} = \eta_{\mathfrak{k}}^*, \\
 \tau_{\mathfrak{k}} &= \tau_{\mathfrak{k}}^*, \quad \varphi_{lh_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = \varphi_{lh_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}^*, \quad \psi_{lh_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}} = \psi_{lh_{\zeta_l} \mathfrak{g}_{\zeta_l}}^*, \quad \beta_{\nu} = \beta_{\nu}^*.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть

$$\Xi^{**}(x) = \Xi(x) - \Xi^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

при (5). Тогда, принимая во внимание (1) и (4), получаем, что

$$\Xi^{**}(x^{\lambda}) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Система (6) является однородной системой \mathbf{b} линейных уравнений с \mathbf{b} неизвестными, которые суть коэффициенты при степенях x^λ в $(r_j \times r_j)$ -матрице c_j , $j \in U$. Определитель этой системы $\det \left(\text{diag } c_j \right)_{j \in U}$ отличен от нуля.

Поэтому

$$\Xi^{**}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Из (4) и (7) вытекает (3), а значит, функция (2) при (5) является первым интегралом системы (APCD \mathfrak{B}). ■

На автономный случай аналогичным образом доказывается следующая закономерность.

Теорема 2. Система (APCD \mathfrak{B}) при $\ell + \mathbf{b} = \mathbf{c} + 1$ имеет автономный первый интеграл (1.3) на области \mathcal{X}' .

Теорема 3. Пусть система (APCD \mathfrak{B}) такова, что

$$\text{div } P^j(x^\lambda) = -I_j, \lambda = \overline{1, N}, j \in U. \quad (8)$$

Тогда при $\ell + \mathbf{b} - \mathbf{u} = \mathbf{c} - m$ система (APCD \mathfrak{B}) имеет либо первый интеграл (5.2) на $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$, либо последний множитель (7.2).

Доказательство. Функция (7.2) в силу тождества (4.2) будет последним множителем системы (APCD \mathfrak{B}) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (8.2).

Функция (2) в силу тождества (4.2) будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD \mathfrak{B}), если и только если выполняется система тождеств (3).

Как и ранее, введём в рассмотрение $(r_j \times r_j)$ -матрицу c_j , векторы-полиномы $\overset{*}{W}^k$, $\overset{*}{R}_{h_{\xi_l} g_{\xi_l}}^l$, $\overset{*}{\mathfrak{W}}^t$, $\overset{*}{\mathfrak{R}}_{h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}^l$, $\overset{*}{S}^\nu$, а также вектор-полином $\overset{*}{\text{div}} P$, который получаем из вектора-полинома

$$\text{div } P(x) = (\text{div } P^1(x), \dots, \text{div } P^m(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

по аналогичному правилу.

Система тождеств

$$\Xi^*(x) + I_{(U)} = -\operatorname{div} P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

распадается на систему, которая при $\ell + \mathbf{b} - \mathbf{u} = \mathbf{c} - m$ состоит из $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ линейных, вообще говоря, неоднородных, уравнений с $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ неизвестными; а система тождеств (4) распадается на однородную систему $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ линейных уравнений с теми же $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ неизвестными.

Определители этих систем совпадают; обозначим определитель $\tilde{\Delta}$.

Пусть $\tilde{\Delta} \neq 0$. Тогда система, соответствующая тождествам (9), имеет единственное решение

$$\begin{aligned} I_j &= I_j^{**}, \quad \gamma_k = \gamma_k^{**}, \quad \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}} = \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}^{**}, \quad \eta_{\mathfrak{e}} = \eta_{\mathfrak{e}}^{**}, \\ \tau_{\mathfrak{e}} &= \tau_{\mathfrak{e}}^{**}, \quad \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = \varphi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}^{**}, \quad \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} = \psi_{lh_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}^{**}, \quad \beta_{\nu} = \beta_{\nu}^{**}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть

$$\tilde{\Xi}: x \rightarrow \Xi(x) - \Xi^*(x) + \operatorname{div} P(x) - \operatorname{div} P^*(x) + I - I_{(U)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

при (10).

Принимая во внимание (1), (8) и (9), устанавливаем, что

$$\tilde{\Xi}(x^\lambda) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\tilde{\Xi}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Из (9) и (11) вытекает (10), а значит, функция μ при (10) является последним множителем системы (APCD \mathfrak{B}).

При $\tilde{\Delta} = 0$ рассматриваем систему тождеств (4), на основании решений которой строим функцию (2). Она и будет первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (APCD \mathfrak{B}), что доказываем так же, как и в случае теоремы 1. ■

В процессе доказательства теоремы 3, по сути дела, были доказаны следующие два утверждения.

Следствие 1. Пусть система (APCD \mathfrak{B}) такова, что выполняются условия (8). Тогда при $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m$, когда определитель $\tilde{\Delta} \neq 0$, система (APCD \mathfrak{B}) имеет последний множитель (7.2).

Следствие 2. Пусть система (APCD \mathfrak{B}) такова, что выполняются условия (8). Тогда при $\ell + \mathfrak{b} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c} - m$, когда определитель $\tilde{\Delta} = 0$, система (APCD \mathfrak{B}) имеет первый интеграл (2) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$.

Для автономного последнего множителя (2.3) и автономного первого интеграла (1.3) системы (APCD \mathfrak{B}) аналогами теоремы 3 и следствий 1 и 2 будут следующие теорема 4 и следствия 3 и 4 из неё. В следствиях 3 и 4 через $\tilde{\Lambda}$ обозначаем определитель, соответствующий определителю $\tilde{\Delta}$ на автономный случай.

Теорема 4. Пусть система (APCD \mathfrak{B}) такова, что

$$\operatorname{div} P^j(x^\lambda) = 0, \quad \lambda = \overline{1, N}, \quad j \in U. \quad (12)$$

Тогда при $\ell + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ система (APCD \mathfrak{B}) имеет либо автономный последний множитель (2.3), либо автономный первый интеграл (1.3) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$.

Следствие 3. Пусть система (APCD \mathfrak{B}) такова, что выполняются условия (12). Тогда при $\ell + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, когда определитель $\tilde{\Lambda} \neq 0$, система (APCD \mathfrak{B}) имеет автономный последний множитель (2.3).

Следствие 4. Пусть система (APCD \mathfrak{B}) такова, что выполняются условия (12). Тогда при $\ell + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, когда определитель $\tilde{\Lambda} = 0$, система (APCD \mathfrak{B}) имеет автономный первый интеграл (1.3) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$.

4.3. Интегралы систем (IAPCD \mathfrak{B})

Адаптируя определение 1 на случай обыкновенных дифференциальных систем (полагая $m = 1$) и используя методы доказательства теорем 3.3 и 4.3, а также теорем 1, 2 и 3, с учётом теоремы 3.2 получаем следующие утверждения для систем (IAPCD \mathfrak{B}).

Теорема 5. Пусть система (IAPCD \mathfrak{B}) такова, что обыкновенная дифференциальная система (APD k) принадлежит классу \mathfrak{B} и не имеет на области \mathcal{X}' первых интегралов (3.3). Тогда система (IAPCD \mathfrak{B}) при $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + 1$ имеет первый интеграл (2) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$.

Теорема 6. Пусть система (IAPCD \mathfrak{B}) такова, что существует $k \in \{1, \dots, m\}$ такое, что обыкновенная дифференциальная система (APD k) принадлежит классу \mathfrak{B} , не имеет на области \mathcal{X}' первых интегралов (3.3) и

$$\Phi: x \rightarrow \Xi_j(x) + \operatorname{div} \mathbf{p}_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq k, \quad (13)$$

индуцированного семейством (9.3), расходимость

$$\operatorname{div} P^k(x^\lambda) = -I_k, \quad \lambda = \overline{1, N}, \quad I_k \in \mathbb{R}.$$

Тогда при $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ система (IAPCD \mathfrak{B}) имеет либо последний множитель (7.2), либо первый интеграл (2) на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$.

Из теоремы 6 получаем такие утверждения.

Следствие 5. Пусть система (IAPCD \mathfrak{B}) такова, что существует $k \in \{1, \dots, m\}$ такое, что система (APD k) принадлежит классу \mathfrak{B} , не имеет на области \mathcal{X}' первых интегралов (3.3), определитель $\tilde{\Delta}_k = 0$. Тогда при $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ скалярная функция (2) является первым интегралом на области $\mathbb{R}^m \times \mathcal{X}'$ системы (IAPCD \mathfrak{B}).

Следствие 6. Пусть система (IAPCD \mathfrak{B}) такова, что существует $k \in \{1, \dots, m\}$ такое, что система (APD k) принадлежит классу \mathfrak{B} , не имеет на пространстве \mathbb{R}^n первых интегралов вида (13), определитель $\tilde{\Delta}_k \neq 0$, расходимость

$$\operatorname{div} P^k(x^\lambda) = -I_k, \quad \lambda = \overline{1, N}, \quad I_k \in \mathbb{R}.$$

Тогда при $\ell + \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k$ система (IAPCD \mathfrak{B}) имеет последний множитель (7.2).

Пример 1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dt_1 - 2x_1x_2 dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2 dt_1 + (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) dt_2, \\ dx_3 &= -2x_3(x_1 dt_1 + x_2 dt_2) \end{aligned} \quad (14)$$

является вполне разрешимой и в соответствии с теоремой 2.2.7.1 имеет один автономный первый интеграл, ибо $n - \text{rang } P(x) = 3 - 2 = 1$.

Полиномы

$$w_1: x \rightarrow x_3, \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{и} \quad w_2: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

являются автономными полиномиальными частными интегралами системы (14), которым в тождествах (4.2) соответствуют полиномы

$$W_{11}(x) = -2x_1, \quad W_{12}(x) = -2x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

и

$$W_{21}(x) = -2x_1, \quad W_{22}(x) = -2x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Числа $\ell = 2$, $\mathbf{c} = 8$.

У системы уравнений (14) выделим следующие интегральные точки (они регулярные):

$A_1(0, 1, 0)$ и $A_2(0, 2, 0)$ с весами $\rho_1 = \rho_2 = 1$ по общей базе $\theta_1 = \theta_2 = \{1\}$;

$A_3(1, 0, 0)$ и $A_4(2, 0, 0)$ с весами $\rho_3 = \rho_4 = 1$ по общей базе $\theta_3 = \theta_4 = \{2\}$;

$A_5(0, 0, 1)$ с весом $\rho_5 = 2$ по базе $\theta_5 = \{1; 2\}$,

для которых $U = \{1; 2\}$, $\mathbf{u} = 2$.

Матрицы $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$ имеют размер 3×4 и ранг, равный 3.

Поэтому для интегральных точек A_1, \dots, A_5 число $\mathbf{b} = 6$.

Если учесть, что $\ell + \mathbf{b} = 2 + 6 = 8 = \mathbf{c}$, а определитель $\tilde{\Lambda} = 0$, то в силу следствия 2 система (14) имеет автономный первый интеграл

$$F: x \rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_3}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

на любой области \mathcal{X} из множества $\mathbb{R}^3 \setminus \{x: x_3 = 0\}$.

Пример 2. Вполне разрешимая система

$$\begin{aligned} dx_1 &= (1 + (x_1 - x_2)(1 + 3x_1 - x_2))dt_1 + (1 + (x_1 - x_2)(1 + 2x_1))dt_2, \\ dx_2 &= (1 + (x_1 - x_2)(1 + 2x_1))dt_1 + (1 + (x_1 - x_2)(1 + x_1 + x_2))dt_2 \end{aligned} \quad (15)$$

имеет частный интеграл

$$w_1: x \rightarrow x_1 - x_2, \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

кратности $\varkappa = 2$, у которого в тождествах (4.2) полиномы

$$W_{11}(x) = W_{12}(x) = x_1 - x_2, \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$Q_{11}(x) = R_{111}(x) = R_{112}(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

В соответствии с утверждением 2) теоремы 5.3 функция

$$F: (t, x) \rightarrow \frac{1}{x_1 - x_2} + t_1 + t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

является первым интегралом на области $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} — любая область из множества $\{x: x_2 \neq x_1\}$ системы (15).

Теперь автономный полиномиальный частный интеграл w_1 системы (15) будем рассматривать без учёта его кратности.

Для него число $\ell = 1$ и существуют две интегральные точки (они сингулярные) $A_1(1, 1)$ и $A_2(2, 2)$ такие, что для системы (APD1) их веса $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Число $\mathfrak{c}_1 = 3$.

Матрицы $a_1 = b_1$ имеют размер 2×3 и ранг, равный 2.

Значит, для интегральных точек A_1 и A_2 число $\mathfrak{b} = 2$.

Кроме того, расходимость

$$\operatorname{div} P^1(1, 1) = \operatorname{div} P^1(2, 2) = 0,$$

а определитель $\tilde{\Delta}_1 \neq 0$.

Следовательно, $\ell + \mathfrak{b} = 1 + 2 = 3 = \mathfrak{c}_1$.

Обыкновенная дифференциальная система (APD1) не имеет первого интеграла

$$\Phi: x \rightarrow x_1 - x_2, \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

вида (13).

Всё это в соответствии со следствием 6 означает, что система (15) имеет последний множитель

$$\mu: x \rightarrow \frac{1}{(x_1 - x_2)^4}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Пример 3. Вполне разрешимая система [1, с. 49]

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2 + x_2^2) dt_1 - 2x_1x_2 dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2 dt_1 + (x_1^2 - x_2^2) dt_2 \end{aligned} \quad (16)$$

имеет автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1: x \rightarrow x_1 + ix_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \text{и} \quad \mathfrak{w}_2: x \rightarrow x_1 - ix_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

которым в тождествах (4.2) соответствуют полиномы

$$\mathfrak{W}_{11}(x) = -x_1 - ix_2, \quad \mathfrak{W}_{12}(x) = -x_2 + ix_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_{21}(x) = -x_1 + ix_2, \quad \mathfrak{W}_{22}(x) = -x_2 - ix_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Число $\ell = 2$.

Для системы (APD1) число $\mathfrak{c}_1 = 3$.

Интегральная точка (она особая) $A_1(0, 0)$ системы (APD1) имеет вес $\rho_1 = 1$.

Матрицы $a_1 = b_1$ размера 1×3 имеют ранг, равный 1, а значит, для точки A_1 число $\mathfrak{b} = 1$.

Расходимость $\operatorname{div} P^1(0, 0) = 0$, определитель $\tilde{\Delta}_1 \neq 0$.

Отсюда следует, что $\ell + \mathfrak{b} = 1 + 2 = 3 = \mathfrak{c}_1$, и, кроме того, система (APD1) не имеет первых интегралов

$$\Phi: x \rightarrow (\gamma_1 + \gamma_2 + 4)x_1 + i(\gamma_1 - \gamma_2)x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

вида (13).

Поэтому система (16) по следствию 6 имеет последний множитель

$$\mu: x \rightarrow \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}, \quad (17)$$

где \mathcal{X} — произвольная область из $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Пример 4. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2) dt_1 + (-x_2 - x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) dt_2, \\ dx_2 &= (x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2) dt_1 + (x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) dt_2 \end{aligned} \quad (18)$$

имеет комплекснозначные автономные полиномиальные частные интегралы

$$\mathfrak{w}_1: x \rightarrow x_1 + i x_2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{w}_2: x \rightarrow x_1 - i x_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

с функциями

$$\mathfrak{W}_{11}(x) = x_1 - x_2 + i(1 + x_1 + x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_{12}(x) = -x_1 + x_2 + i(1 - x_1 - x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

и

$$\mathfrak{W}_{21}(x) = x_1 - x_2 - i(1 + x_1 + x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathfrak{W}_{22}(x) = -x_1 + x_2 - i(1 - x_1 - x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

У системы (18) выделим две интегральные точки: $A_1(-0,5, -0,5)$ с весом $\rho_1 = 1$ по базе $\theta_1 = \{1\}$ и $A_2(0,5, 0,5)$ с весом $\rho_2 = 1$ по базе $\theta_2 = \{2\}$.

При этом $\mathfrak{b} = r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4$.

Кроме того,

$$\ell = 2, \quad \mathfrak{c} = \binom{2+2-1}{2} + \binom{2+2-1}{2} = 6,$$

а значит, $\ell + \mathfrak{b} = 2 + 4 = 6 = \mathfrak{c}$.

Поскольку

$$\operatorname{div} P^1(-0,5, -0,5) = \operatorname{div} P^2(0,5, 0,5) = 0,$$

то выполняются условия теоремы 4, и функция (17) будет автономным последним множителем системы (18).

§ 4. Интегралы линейной автономной системы уравнений в полных дифференциалах

1. Линейный частный интеграл

Интегральная характеристическая система. Линейный однородный частный интеграл.

Рассмотрим линейную однородную автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = A(x) dt, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_m)$ — точки из \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно, векторы-столбцы $dx = \text{colon}(dx_1, \dots, dx_n)$ и $dt = \text{colon}(dt_1, \dots, dt_m)$, элементами матрицы $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ (n строк, m столбцов) являются линейные однородные функции

$$a_{ij} : x \rightarrow \sum_{\xi=1}^n a_{ij\xi} x_{\xi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

с коэффициентами $a_{ij\xi} \in \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Система (1) индуцирует автономные линейные дифференциальные операторы

$$p_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \partial_i, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

которые не являются линейно связанными на \mathbb{R}^n . При этом по необходимости $m < n$.

Для того чтобы комплекснозначная линейная однородная функция

$$p : x \rightarrow \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (b_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1, n})$$

была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно выполнения системы тождеств

$$\mathfrak{p}_j p(x) = p(x) \lambda^j, \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda^j \in \mathbb{C}, j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Система тождеств (2) имеет место тогда и только тогда, когда совместна линейная однородная система

$$(A_j - \lambda^j E) b = 0, j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где $b = \text{colon}(b_1, \dots, b_n)$, E — единичная матрица, квадратные матрицы n -го порядка $A_j = \|a_{\xi j i}\|$, $j = \overline{1, m}$, (ξ — номер строки, i — номер столбца).

Систему

$$\det(A_j - \lambda^j E) = 0, j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

назовём *интегральной характеристической системой*, а её корни будем называть *интегральными характеристическими корнями* дифференциальной системы (1).

Условия Фробениуса

$$[\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_\zeta(x)] = \mathfrak{O}, \forall x \in \mathbb{R}^n, j, \zeta = \overline{1, m},$$

полной разрешимости системы (1) равносильны перестановочности матриц:

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, j, \zeta = \overline{1, m}.$$

Лемма 1. Пусть ν ($\nu \in \mathbb{C}^n$) — общий собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда частным интегралом вполне разрешимой системы (1) является линейная однородная функция

$$p: x \rightarrow \nu x, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Действительно, если ν — общий собственный вектор перестановочных матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, то он является решением [21, с. 191 — 194] линейной однородной системы (3), где λ^j — собственные числа соответственно матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствует собственный вектор ν .

Тогда выполняется система тождеств (2) относительно линейной функции (5):

$$\mathbf{p}_j(\nu x) = \lambda^j \nu x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}.$$

А значит, функция (5) является частным интегралом дифференциальной системы (1). ■

2. Автономный базис первых интегралов

Построение автономных первых интегралов по собственным векторам матриц коэффициентов системы.

2.1. Случай вещественных интегральных характеристических корней

Теорема 1. Пусть ν^k , $k = \overline{1, m+1}$, — общие вещественные собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда скалярная функция

$$W: x \rightarrow \prod_{k=1}^{m+1} |\nu^k x|^{h_k}, \quad (1)$$

где вещественные числа h_k , $k = \overline{1, m+1}$, являются нетривиальным решением линейной однородной системы

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

коэффициентами которой являются вещественные собственные числа λ_k^j матриц A_j , соответствующие собственным векторам ν^k , $k = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1, m}$, на любой области из множества определения DW будет автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1).

Доказательство. Пусть ν^k , $k = \overline{1, m+1}$, — общие вещественные собственные векторы матриц A_1, \dots, A_m .

Тогда у этих матриц существуют вещественные собственные числа λ_k^j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = \overline{1, m+1}$.

Согласно лемме 1.1 линейные однородные функции

$$p_k: x \rightarrow \nu^k x, \forall x \in \mathbb{R}^n, k = \overline{1, m+1},$$

являются частными интегралами системы (1.1), и выполняется система тождеств

$$\mathfrak{p}_j p_k(x) = \lambda_k^j p_k(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m+1}. \quad (3)$$

Составим функцию

$$W: x \rightarrow \prod_{k=1}^{m+1} |p_k(x)|^{h_k}, \forall x \in \mathcal{X}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,$$

где h_k , $k = \overline{1, m+1}$, — вещественные числа, одновременно не равные нулю.

Производные Ли этой функции в силу системы (1.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j W(x) &= \prod_{k=1}^{m+1} |p_k(x)|^{h_k-1} \sum_{k=1}^{m+1} \operatorname{sgn} p_k(x) h_k \prod_{l=1, l \neq k}^{m+1} |p_l(x)| \mathfrak{p}_j p_k(x), \\ &\forall x \in \mathcal{X}, j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

С учётом тождеств (3) устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_j W(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k W(x), \forall x \in \mathcal{X}, j = \overline{1, m}.$$

Если числа h_k , $k = \overline{1, m+1}$, являются нетривиальным решением линейной однородной системы (2), то скалярная функция (1) будет автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1). ■

Следствие 1. Пусть ν^k , $k = \overline{1, m+1}$, — общие вещественные собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1) будет скалярная функция

$$W_{12\dots m(m+1)} : x \rightarrow \prod_{k=1}^m |\nu^k x|^{-\Delta_k} |\nu^{m+1} x|^{\Delta}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где определитель $\Delta = |\lambda_k^j|$, а определители Δ_k , $k = \overline{1, m}$, получены заменой k -го столбца в определителе Δ на столбец $\text{colon}(\lambda_{m+1}^1, \dots, \lambda_{m+1}^m)$, λ_k^j — вещественные собственные числа матриц A_j , которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1, m}$.

Пример 1. Построим базис автономных первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= -x_1 dt_2, & dx_2 &= 2(x_3 + x_4) dt_1 + x_2 dt_2, \\ dx_3 &= x_2 dt_1 + x_4 dt_2, & dx_4 &= x_2 dt_1 + x_3 dt_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрицы

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

перестановочны, а значит, система (4) вполне разрешима.

Собственными числами матриц A_1 и A_2 соответственно являются

$$\lambda_1^1 = -2, \quad \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 0, \quad \lambda_4^1 = 2$$

и

$$\lambda_1^2 = 1, \quad \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = -1, \quad \lambda_4^2 = 1,$$

их находим как корни интегральных характеристических уравнений

$$\det(A_1 - \lambda^1 E) = 0 \iff (\lambda^1 + 2)(\lambda^1)^2(\lambda^1 - 2) = 0$$

и

$$\det(A_2 - \lambda^2 E) = 0 \iff (\lambda^1 + 1)^2(\lambda^1 - 1)^2 = 0.$$

Матрицы A_1 и A_2 приведём к жордановым нормальным формам

$$J_1 = \text{diag} \{ -2, 0, 0, 2 \} \quad \text{и} \quad J_2 = \text{diag} \{ 1, -1, -1, 1 \}$$

так, чтобы в представлениях $A_1 = B_1 J_1 B_1^{-1}$ и $A_2 = B_2 J_2 B_2^{-1}$ матрицы перехода B_1 и B_2 были равными, например:

$$B_1 = B_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Поэтому общими вещественными линейно независимыми собственными векторами матриц A_1 и A_2 будут

$$\nu^1 = (0, -1, 1, 1), \quad \nu^2 = (1, 0, 0, 0), \quad \nu^3 = (0, 0, 1, -1), \quad \nu^4 = (0, 1, 1, 1).$$

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда скалярные функции

$$W_{123}: x \rightarrow \frac{(x_3 - x_4)^2}{x_1^2}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (5)$$

и

$$W_{124}: x \rightarrow x_1^4 (x_2^2 - (x_3 + x_4)^2)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad (6)$$

будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов системы (4) на областях \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 \neq 0\}$.

2.2. Случай комплексных интегральных характеристических корней

В случае, когда p — комплекснозначный частный интеграл дифференциальной системы (1.1), система тождеств (2.1) распадается на вещественную систему тождеств

$$\begin{aligned}
p_j \operatorname{Re} p(x) &= \operatorname{Re} p(x) \lambda^j - \operatorname{Im} p(x) \tilde{\lambda}^j, \\
p_j \operatorname{Im} p(x) &= \operatorname{Re} p(x) \tilde{\lambda}^j + \operatorname{Im} p(x) \lambda^j, \\
\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda^j &= \lambda^{*j} + \tilde{\lambda}^j i, j = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тем самым получаем критерий существования комплексно-значного частного интеграла.

Лемма 1. *Линейная функция p является комплексно-значным частным интегралом системы (1.1) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (7).*

С учётом этого критерия устанавливаем следующие закономерности относительно комплекснозначного частного интеграла дифференциальной системы (1.1).

Свойство 1. *Если система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл p , то комплексно сопряжённая функция \bar{p} также является частным интегралом системы (1.1). При этом наряду с системой тождеств (2.1) имеет место и система тождеств*

$$p_j \bar{p}(x) = \bar{p}(x) \bar{\lambda}^j, \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m},$$

где числа $\bar{\lambda}^j$ комплексно сопряжены с числами λ^j , $j = \overline{1, m}$.

Свойство 2. *Если система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл p , то вещественный полином*

$$P: x \rightarrow \operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

является частным интегралом системы (1.1) и на пространстве \mathbb{R}^n выполняется система тождеств

$$p_j (\operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x)) = 2(\operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x)) \lambda^{*j}, j = \overline{1, m},$$

где числа λ^j , $j = \overline{1, m}$, находятся из тождеств (2.1).

Свойство 3. *Пусть система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл p . Тогда производные Ли в силу системы (1.1) экспоненциальной функции*

$$\psi: x \rightarrow \exp \varphi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

при

$$\varphi: x \rightarrow \arctg \frac{\operatorname{Im} p(x)}{\operatorname{Re} p(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (9)$$

равны

$$p_j \exp \varphi(x) = \exp \varphi(x) \tilde{\lambda}^j, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (10)$$

где числа λ^j , $j = \overline{1, m}$, находятся из тождеств (2.1), область \mathcal{X} из пространства \mathbb{R}^n такова, что её дополнение до \mathbb{R}^n включает множество всех нулей функции $\operatorname{Re} p$.

Из тождеств (10) следует формула вычисления производных Ли в силу системы (1.1) функции аргумента (9) комплекснозначного частного интеграла p этой системы:

$$p_j \varphi(x) = \tilde{\lambda}^j, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Свойство 4. Произведение $u_1 u_2$ полиномов $u_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ и $u_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$, где \mathbb{K} — поле вещественных \mathbb{R} или комплексных \mathbb{C} чисел, является частным интегралом (вещественным или комплекснозначным) системы (1.1) тогда и только тогда, когда его сомножители u_1 и u_2 являются частными интегралами дифференциальной системы (1.1).

Свойство 5. Вещественный полином (8) является частным интегралом системы (1.1), если и только если система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл p (или комплексно сопряжённый ему).

Введём обозначения:

$$P_k(x) = (\nu^k x)^2 + (\tilde{\nu}^k x)^2, \quad \varphi_k(x) = \arctg \frac{\tilde{\nu}^k x}{\nu^k x}.$$

Теорема 2. Пусть $\nu^k = \nu^{*k} + \tilde{\nu}^k i$, $k = \overline{1, s}$, $s \leq (m+1)/2$, и ν^θ , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$, — соответственно общие комплексные (среди которых нет комплексно сопряжённых) и вещественные собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Тогда автономным первым интегралом на области \mathcal{X} из \mathbb{R}^n вполне разрешимой системы (1.1) является функция

$$W: x \rightarrow \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{h_k^*} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} |\nu^\theta x|^{h_\theta}, \quad (11)$$

где \mathcal{X} есть область из множества определения DW, а вещественные числа h_k^* , \tilde{h}_k , $k = \overline{1, s}$, h_θ , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$, составляют нетривиальное решение линейной системы

$$2 \sum_{k=1}^s (\lambda_k^j h_k^* - \tilde{\lambda}_k^j \tilde{h}_k) + \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \lambda_\theta^j h_\theta = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (12)$$

где $\lambda_k^j = \lambda_k^j + \tilde{\lambda}_k^j i$, $k = \overline{1, s}$, и λ_θ^j , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$, есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = \overline{1, s}$, и ν^θ , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$.

Доказательство. Пусть $\nu^k = \tilde{\nu}^k + \tilde{\nu}^k i$, $k = \overline{1, s}$, $s \leq (m+1)/2$, и ν^θ , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$, — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Тогда у этих матриц существуют комплексные λ_k^j , $k = \overline{1, s}$, и вещественные λ_θ^j , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$, $j = \overline{1, m}$, собственные числа которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = \overline{1, s}$, и ν^θ , $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$.

Согласно лемме 1.1 линейные функции

$$p_k: x \rightarrow \nu^k x, \quad k = \overline{1, s},$$

и

$$p_\theta: x \rightarrow \nu^\theta x, \quad \theta = \overline{s+1, m+1-s},$$

являются частными интегралами на \mathbb{R}^n системы (1.1).

Отсюда с учётом свойства 2 заключаем, что на пространстве \mathbb{R}^n выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j P_k(x) &= 2P_k(x) \lambda_k^j, \quad \mathfrak{p}_j \nu^\theta x = \lambda_\theta^j \nu^\theta x, \\ j &= \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}, \quad \theta = \overline{s+1, m+1-s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Составим скалярную функцию (11), где $\overset{*}{h}_k, \tilde{h}_k, k = \overline{1, s}$, и $h_\theta, \theta = \overline{s+1, m+1-s}$, — вещественные числа, одновременно не равные нулю.

Производные Ли в силу дифференциальной системы (1.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j W(x) &= \left(\prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\overset{*}{h}_k - 1} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sum_{k=1}^s \overset{*}{h}_k \prod_{l=1, l \neq k}^s P_l(x) \mathfrak{p}_j P_k(x) + \\ &\quad \left. + \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\overset{*}{h}_k} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \sum_{k=1}^s \mathfrak{p}_j (-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} |\nu^\theta x|^{h_\theta} + \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\overset{*}{h}_k} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} |\nu^\theta x|^{h_\theta - 1} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \operatorname{sgn}(\nu^\theta x) h_\theta \prod_{l=s+1, l \neq \theta}^{m+1-s} |\nu^l x| \mathfrak{p}_j(\nu^\theta x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Отсюда на основании тождеств (13), свойств 2 и 3 устанавливаем, что

$$\mathfrak{p}_j W(x) \equiv \left(\sum_{k=1}^s 2(\overset{*}{\lambda}_k^j \overset{*}{h}_k - \tilde{\lambda}_k^j \tilde{h}_k) + \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \lambda_\theta^j h_\theta \right) W(x), \quad j = \overline{1, m}.$$

Если числа $h_k^*, \tilde{h}_k, k = \overline{1, s}, h_\theta, \theta = \overline{s+1, m+1-s}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы (12), то функция (11) будет первым интегралом системы (1.1). ■

Пример 2. Для вполне разрешимой системы

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 dt_1 + x_2 dt_2, & dx_2 &= x_2 dt_1 - x_1 dt_2, \\ dx_3 &= x_3 dt_1 - x_3 dt_2 \end{aligned} \quad (14)$$

по собственным числам

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 1; \quad \lambda_1^2 = -i, \lambda_2^2 = i, \lambda_3^2 = -1$$

и общим линейно независимым собственным векторам

$$\nu^1 = (1, i, 0), \quad \nu^2 = (1, -i, 0), \quad \nu^3 = (0, 0, 1)$$

строим (теорема 2) базис автономных первых интегралов

$$W: x \rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} \exp\left(2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}\right), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (15)$$

на областях \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 \neq 0, x_3 \neq 0\}$.

Теорема 3. Пусть $\nu^\tau = \check{\nu}^\tau + \tilde{\nu}^\tau i, \nu^{s+\tau} = \check{\nu}^\tau - \tilde{\nu}^\tau i, \tau = \overline{1, s}, s \leq m/2, \nu^{2s+1} = \check{\nu}^{2s+1} + \tilde{\nu}^{2s+1} i, u \nu^\theta, \theta = \overline{2s+2, m+1}$, — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.1) будут функции

$$\begin{aligned} W_1: x \rightarrow \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\check{h}_k^* + \check{h}_{s+k}^*} \exp(-2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_{s+k})\varphi_k(x)) \cdot \\ \cdot (P_{2s+1}(x))^{\check{h}_{2s+1}^*} \exp(-2\tilde{h}_{2s+1}\varphi_{2s+1}(x)) \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} (\nu^\theta x)^{2\check{h}_\theta^*}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$W_2: x \rightarrow \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\tilde{h}_k + \tilde{h}_{s+k}} \exp(2(h_k^* - h_{s+k}^*)\varphi_k(x)). \quad (17)$$

$$\cdot (P_{2s+1}(x))^{\tilde{h}_{2s+1}} \exp(2h_{2s+1}^* \varphi_{2s+1}(x)) \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} (\nu^\theta x)^{2\tilde{h}_\theta}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где \mathcal{X} есть область из множества $DW_1 \cap DW_2$, а комплексные числа $h_k = h_k^* + \tilde{h}_k i$, $k = \overline{1, m+1}$, составляют нетривиальное решение системы (2), коэффициентами которой являются комплексные $\lambda_\tau^j = \lambda_\tau^{*j} + \tilde{\lambda}_\tau^{*j} i$, $\lambda_{s+\tau}^j = \lambda_\tau^{*j} - \tilde{\lambda}_\tau^{*j} i$, $\tau = \overline{1, s}$, $\lambda_{2s+1}^j = \lambda_{2s+1}^{*j} + \tilde{\lambda}_{2s+1}^{*j} i$ и вещественные λ_θ^j , $\theta = \overline{2s+2, m+1}$, собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, соответствующие общим собственным векторам ν^k , $k = \overline{1, m+1}$.

Доказательство. Построим две функции

$$W^*: x \rightarrow \prod_{k=1}^{2s} (\nu^k x)^{h_k} (\nu^{2s+1} x)^{h_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} (\nu^\theta x)^{h_\theta}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

и

$$\tilde{W}^{**}: x \rightarrow \prod_{k=1}^{2s} (\nu^k x)^{l_k} (\nu^{2s+1} x)^{l_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} (\nu^\theta x)^{l_\theta}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где h_k , l_k , $k = \overline{1, m+1}$, — некоторые комплексные числа.

Функции W^* и \tilde{W}^{**} в общем случае представляют собой скалярные комплекснозначные функции вещественных аргументов.

С учётом леммы 1.1 и свойства 1 на области \mathcal{X} действия

$$\mathbf{p}_j^* W(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k^* W(x), \quad j = \overline{1, m},$$

$$\mathbf{p}_j^{**} W(x) = \left(\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j} l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j l_\theta \right)^{**} W(x), \quad j = \overline{1, m},$$

Если совместна система (2), то функция W^* будет первым интегралом системы (1.1).

Пусть $h_k = h_k^* + \tilde{h}_k i$, $k = \overline{1, m+1}$, — решение системы (2). Тогда решением системы

$$\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j} l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j l_\theta = 0 \quad j = \overline{1, m},$$

будут числа

$$l_k = h_{s+k}^* - \tilde{h}_{s+k} i, \quad l_{s+k} = h_k^* - \tilde{h}_k i, \quad k = \overline{1, s},$$

$$l_{2s+1} = h_{2s+1}^* - \tilde{h}_{2s+1} i, \quad l_\theta = h_\theta^* - \tilde{h}_\theta i, \quad \theta = \overline{2s+2, m+1}.$$

При этом функция W^{**} будет первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы (1.1).

Положив на области \mathcal{X}

$$W_1(x) = W^*(x) W^{**}(x) \quad \text{и} \quad W_2(x) = W^{**i}(x) W^{*-i}(x),$$

получим соответственно первые интегралы видов (16) и (17). ■

Пример 3. Для вполне разрешимой системы

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 dt_1 + x_3 dt_2, & dx_2 &= -x_2 dt_1 + x_4 dt_2, \\ dx_3 &= x_3 dt_1 - x_1 dt_2, & dx_4 &= -x_4 dt_1 - x_2 dt_2 \end{aligned} \tag{18}$$

на основании собственных чисел

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = -1, \quad \lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 1; \quad \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = -i, \quad \lambda_2^2 = \lambda_4^2 = i$$

и общих комплексных линейно независимых собственных векторов

$$\nu^1 = (0, -i, 0, 1), \nu^2 = (0, i, 0, 1), \nu^3 = (-i, 0, 1, 0), \nu^4 = (i, 0, 1, 0)$$

строим (теорема 3) базис автономных первых интегралов на пространстве \mathbb{R}^4 , состоящий из скалярных функций

$$W_1: x \rightarrow x_1x_2 + x_3x_4 \quad \text{и} \quad W_2: x \rightarrow x_1x_4 - x_2x_3. \quad (19)$$

2.3. Случай кратных интегральных характеристических корней

Из системы (1.1) произвольным образом выделим обыкновенную дифференциальную систему

$$dx = A^\zeta(x) dt_\zeta, \quad (1.\zeta)$$

где $A^\zeta(x) = \text{colon}(a_{1\zeta}(x), \dots, a_{n\zeta}(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, со свойством: у матрицы A_ζ число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

При этом характеристическим уравнением дифференциальной системы (1.ζ) является ζ -е уравнение характеристической системы (4.1), которое будем обозначать (4.ζ).

Определение 1. Пусть λ_l^ζ — собственное число матрицы A_ζ , которому соответствует элементарный делитель кратности s и собственный вектор ν^{ol} . Вектор ν^{kl} , координатами которого являются решения системы уравнений

$$(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E) \text{colon}(\nu_1^{kl}, \dots, \nu_n^{kl}) = k \text{colon}(\nu_1^{k-1, l}, \dots, \nu_n^{k-1, l}), \quad k = \overline{1, s-1}, \quad (20)$$

назовём **k -м присоединённым вектором** матрицы A_ζ , соответствующим собственному числу λ_l^ζ .

Теорема 4. Пусть ν^{ol} и $\nu^{\theta l}$, $\theta = \overline{1, s_l - 1}$, $l = \overline{1, r}$, — вещественные общие собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ , которые соответствуют собственным числам λ_l^ζ , $l = \overline{1, r}$, имеющим эле-

ментарные делители кратности s_l при $\sum_{l=1}^r s_l \geq m+1$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1) является скалярная функция

$$W: x \rightarrow \prod_{\xi=1}^k (\nu^{0\xi} x)^{h_{0\xi}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} v_{q\xi}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (21)$$

где \mathcal{X} есть область из множества определения DW , функции $v_{q\xi}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $q = \overline{1, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, такие, что

$$\nu^{i\xi} x = \sum_{q=1}^i \binom{i-1}{q-1} v_{q\xi}(x) \nu^{i-q, \xi} x, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad i = \overline{1, \varepsilon_\xi}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad (22)$$

и $\sum_{\xi=1}^k \varepsilon_\xi = m - k + 1$, $\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k}$, $k \leq r$. При этом функции-решения $v_{q\xi}$ такие, что на области \mathcal{X}

$$p_j v_{q\xi}(x) = \mu_{q\xi}^j, \quad \mu_{q\xi}^j = \text{const}, \quad q = \overline{1, \varepsilon_\xi}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m},$$

а числа $h_{q\xi}$, $q = \overline{0, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^k \left(\lambda_\xi^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (23)$$

в которой λ_ξ^j , $\xi = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$, суть вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, соответствующие собственным векторам $\nu^{0\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$.

Доказательство. На основании системы равенств (20) и леммы 1.1 устанавливаем, что на пространстве \mathbb{R}^n

$$\mathbf{p}_\zeta(\nu^{0l}x) = \lambda_l^\zeta \nu^{0l}x, \quad l = \overline{1, r}, \quad (24)$$

$$\mathbf{p}_\zeta(\nu^{\theta l}x) = \lambda_l^\zeta \nu^{\theta l}x + \theta \nu^{\theta-1, l}x, \quad \theta = \overline{1, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r}.$$

Систему (22) при каждом фиксированном ξ , $\xi = \overline{1, k}$, всегда можно разрешить относительно $v_{q\xi}$, так как её определитель равен $(\nu^{0\xi}x)^{\varepsilon\xi}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, и отличен от тождественного нуля на области \mathcal{X} .

Докажем, что для функций v_{ql} справедливы тождества

$$\mathbf{p}_\zeta v_{ql}(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in \mathcal{X}, \text{ при } q = 1; \\ 0, & \forall x \in \mathcal{X}, \text{ при } q = \overline{2, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (25)$$

Соотношения (25) при $q = 1$ и $q = 2$ непосредственно проверяются на основании тождеств (24).

Доказательство для случаев $q \geq 3$ проведём методом математической индукции.

Предположим, что система тождеств (25) выполняется при $q = \overline{1, \varepsilon - 1}$.

Вычислим производную Ли в силу системы (1.ζ) от функции $p: x \rightarrow \nu^{\varepsilon l}x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, с учётом соотношений (22), (24) и (25) при $q = \overline{1, \varepsilon - 1}$ на области \mathcal{X} :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\zeta(\nu^{\varepsilon l}x) &= \lambda_l^\zeta \sum_{q=1}^{\varepsilon} \binom{\varepsilon-1}{q-1} v_{ql}(x) \nu^{\varepsilon-q, l}x + \\ &+ (\varepsilon - 1) \sum_{q=1}^{\varepsilon-1} \binom{\varepsilon-2}{q-1} v_{ql}(x) \nu^{\varepsilon-q-1, l}x + \nu^{\varepsilon-1, l}x + \nu^{0l}x \mathbf{p}_\zeta v_{\varepsilon l}(x). \end{aligned}$$

Отсюда в силу соотношений (22) при $i = \varepsilon - 1$ и $i = \varepsilon$, соотношений (24) при $\theta = \varepsilon$ и того, что $\nu^{0l}x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, получаем

$$\mathbf{p}_\zeta v_{\varepsilon l}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Пусть

$$v_{0l}(x) = \ln(\nu^{0l}x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, r}. \quad (26)$$

Тогда из соотношений (24) и (25) получаем, что

$$\mathfrak{p}_\zeta v_{0l}(x) = \lambda_l^\zeta, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, r}, \quad (27)$$

$$\mathfrak{p}_\zeta v_{1l}(x) = 1, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, r}, \quad (28)$$

$$\mathfrak{p}_\zeta v_{ql}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad q = \overline{2, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r}. \quad (29)$$

Перестановочные матрицы A_j , $j = \overline{1, m}$, имеют r общих собственных векторов, и выполняются соотношения

$$\mathfrak{p}_j v_{0l}(x) = \lambda_l^j, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad l = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (30)$$

Учитывая, что скобки Пуассона линейных дифференциальных операторов первого порядка \mathfrak{p}_j , $j = \overline{1, m}$, симметричны, из соотношений (28) и (29) на области \mathcal{X} получаем

$$\mathfrak{p}_j v_{ql}(x) = \mu_{ql}^j, \quad q = \overline{1, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq \zeta. \quad (31)$$

Следовательно, существует $\sum_{l=1}^r s_l$ функций

$$v_{ql}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q = \overline{0, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r},$$

заданных соотношениями (22) и (26), относительно которых выполняются условия (25), (27) – (31) и которые, учитывая способ их построения, функционально независимы.

Построим функцию

$$W^*: x \rightarrow \sum_{\xi=1}^k \sum_{q=0}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} v_{q\xi}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

и вычислим действия:

$$\mathfrak{p}_j^* W(x) = \sum_{\xi=1}^k (\lambda_{\xi}^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\xi}} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi}), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Если числа $h_{q\xi}$, $q = \overline{0, \varepsilon_{\xi}}$, $\xi = \overline{1, k}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы (23), то функция W^* является первым интегралом на области \mathcal{X} системы (1.1).

Положив

$$W(x) = \exp^* W(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

получим первый интеграл вида (21) системы (1.1). ■

Пример 4. Для вполне разрешимой системы

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt_1 + (2x_1 - x_3) dt_2, \\ dx_2 &= (2x_2 - x_3 - x_4) dt_1 + (-x_1 + 2x_2 + x_4) dt_2, \\ dx_3 &= (x_1 - x_4) dt_1 + (-x_1 + 3x_3 + x_4) dt_2, \\ dx_4 &= (-x_1 + 2x_3 + 2x_4) dt_1 + (x_2 - 3x_3 + x_4) dt_2 \end{aligned} \quad (32)$$

по собственному числу $\lambda_1^1 = 1$, которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1)^4$, собственному $\nu^0 = (-1, 1, -1, 0)$ и присоединённым $\nu^1 = (1, 0, -1, -1)$, $\nu^2 = (1, -1, 3, 0)$, $\nu^3 = (-3, 0, 9, 9)$ векторам строим на области \mathcal{X} скалярные функции

$$\begin{aligned} v_1: x &\rightarrow (x_1 - x_3 - x_4)(-x_1 + x_2 - x_3)^{-1}, \\ v_2: x &\rightarrow ((-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + 3x_3) - (x_1 - x_3 - x_4)^2)(-x_1 + x_2 - x_3)^{-2}, \\ v_3: x &\rightarrow ((-3x_1 + 9x_3 + 9x_4)(-x_1 + x_2 - x_3)^2 - \\ &- 3(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 3x_3) + \\ &+ 2(x_1 - x_3 - x_4)^3)(-x_1 + x_2 - x_3)^{-3}, \end{aligned}$$

где \mathcal{X} — произвольная область из множества $\{x: x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}$.

Тогда функции

$$W_1: x \rightarrow v_2(x), W_2: x \rightarrow (-x_1 + x_2 - x_3)^2 \exp(-2v_1(x) - v_3(x)), \quad (33)$$

образуют базис первых интегралов системы (32) на областях \mathcal{X} .

Дополнительно обозначим:

$$P_{0\xi}(x) = (\nu^{*0\xi} x)^2 + (\tilde{\nu}^{0\xi} x)^2, \quad \varphi_{0\xi}(x) = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\nu}^{0\xi} x}{\nu^{*0\xi} x}.$$

Доказательство теоремы 4 предусматривает также и случай, когда матрицы A_j , $j = \overline{1, m}$, имеют некоторое число общих комплексных собственных вектора ν^{0l} , соответствующих собственным числам λ_l^ζ с элементарными делителями кратности s_l .

В данном случае на основании определённой группировки $m + 1$ функций v_{ql} , $l = \overline{1, r}$, $q = \overline{0, s_l - 1}$, всегда получим одну из двух возможностей.

1. В наборе из $m + 1$ функций наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента содержится и комплексно сопряжённая.

2. В совокупности из $m + 1$ функций имеется одна комплекснозначная функция вещественного аргумента, не имеющая комплексно сопряжённой.

В каждом из этих случаев дифференциальная система (1.1) будет иметь следующие первые интегралы.

В первом случае это — функция

$$W: x \rightarrow \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{h_{0\xi}^*} \exp\left(-2\tilde{h}_{0\xi}\varphi_{0\xi}(x) + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2(h_{q\xi}^* \tilde{v}_{q\xi}^*(x) - \tilde{h}_{q\xi} \tilde{v}_{q\xi}(x))\right) \prod_{\theta=1}^{k_2} |\nu^{0\theta} x|^{h_{0\theta}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} h_{q\theta} v_{q\theta}(x)$$

на области \mathcal{X} из множества определения DW , где вещественные числа $h_{q\xi}^*$, $\tilde{h}_{q\xi}$ и $h_{q\theta}$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1}$,

$\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} 2 \left((\lambda_{\xi}^j h_{0\xi}^* - \tilde{\lambda}_{\xi}^j \tilde{h}_{0\xi}) + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\xi}} (\mu_{q\xi}^j h_{q\xi}^* - \tilde{\mu}_{q\xi}^j \tilde{h}_{q\xi}) \right) + \\ + \sum_{\theta=1}^{k_2} \left(\lambda_{\theta}^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\theta}} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

а $\lambda_{\xi}^j = \lambda_{\xi}^{*j} + \tilde{\lambda}_{\xi}^j i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и λ_{θ}^j , $\theta = \overline{1, k_2}$, — комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi} = \nu^{*0\xi} + \tilde{\nu}^{0\xi} i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$. Числа

$$\mu_{q\xi}^{*j} = \operatorname{Re} \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \tilde{\mu}_{q\xi}^j = \operatorname{Im} \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q\theta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\theta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

функции

$$v_{q\xi} = \tilde{v}_{q\xi}^* + \tilde{v}_{q\xi} i \quad \text{и} \quad v_{q\theta},$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2}, \quad j = \overline{1, m},$$

находятся из системы (22), а ε_{ξ} и ε_{θ} выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} \varepsilon_{\xi} + \sum_{\theta=1}^{k_2} \varepsilon_{\theta} = m - 2k_1 - k_2 + 1 \quad \text{при} \quad 2k_1 + k_2 \leq r,$$

$\varepsilon_{\xi} \leq s_{\xi} - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\varepsilon_{\theta} \leq s_{\theta} - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов, а k_2 — количество вещественных общих собственных векторов матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пример 5. Система в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
 dx_1 &= (3, -4, 4, 1, 0, 2)x dt_1 + (0, -4, 2, 1, -1, 1)x dt_2 + \\
 &\quad + (-3, 2, -4, -3, 0, -2)x dt_3, \\
 dx_2 &= (-1, 3, -3, 0, -2, -3)x dt_1 + (1, 3, 0, 0, 1, -1)x dt_2 + \\
 &\quad + (2, -3, 3, 3, -1, 2)x dt_3, \\
 dx_3 &= -(3, -5, 5, 1, 2, 4)x dt_1 - (0, -6, 2, 1, -2, 1)x dt_2 + \\
 &\quad + (3, -3, 5, 4, 0, 2)x dt_3, \\
 dx_4 &= (3, -6, 4, 4, -1, 5)x dt_1 + (2, -6, 2, 3, -4, 2)x dt_2 \\
 &\quad - (3, -2, 6, 4, 1, 1)x dt_3, \\
 dx_5 &= (5, -5, 8, 3, 3, 6)x dt_1 + (1, -6, 3, 2, -2, 2)x dt_2 - \\
 &\quad - (3, -3, 6, 4, 1, 2)x dt_3, \\
 dx_6 &= -(2, -5, 4, 3, -1, 2)x dt_1 - (2, -4, 3, 3, -2, 2)x dt_2 + \\
 &\quad + (2, -1, 4, 2, 1, 0)x dt_3
 \end{aligned} \tag{34}$$

является вполне разрешимой.

Комплексному собственному числу $\lambda_1^1 = 1 + 2i$ соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1 - 2i)^3$ кратности три, а также собственный вектор $\nu^0 = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$, первый и второй присоединённые векторы $\nu^1 = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$ и $\nu^2 = (2 + 2i, 0, 2 + 2i, 0, 2i, 2i)$.

По ним на области \mathcal{X} составляем скалярные функции

$$\begin{aligned}
 v_1^* &: x \rightarrow ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + x_6) + (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + x_6))P^{-1}(x), \\
 \tilde{v}_1 &: x \rightarrow ((x_1 + x_3 + x_4 + x_6)(x_2 + x_5 + x_6) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_5))P^{-1}(x), \\
 v_2^* &: x \rightarrow (((x_1 + x_3 + x_4 + x_6)(x_2 + x_5 + x_6) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_5))^2 + \\
 &\quad + 2P(x)((x_1 + x_3)(x_1 + x_3 + x_4 + x_6) + (x_3 + x_5)(x_1 + x_3 + x_5 + x_6)) - \\
 &\quad - ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + x_6) + (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + x_6))^2)P^{-2}(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2: x \rightarrow & 2\left(P(x)\left((x_1 + x_3 + x_4 + x_6)(x_1 + x_3 + x_5 + x_6) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (x_1 + x_3)(x_3 + x_5)\right) + \left((x_3 + x_5)(x_1 + x_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (x_1 + x_3 + x_4 + x_6)(x_2 + x_5 + x_6)\right)\right) \cdot \\ & \cdot \left((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + x_6) + (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + x_6)\right) P^{-2}(x), \end{aligned}$$

где полином

$$P: x \rightarrow (x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 + (x_3 + x_5)^2, \forall x \in \mathbb{R}^6.$$

Тогда скалярные функции

$$W_1: x \rightarrow P(x) \exp(-4\varphi(x) + 6v_1^*(x) + 2\tilde{v}_1(x)), \forall x \in \mathcal{X}, \quad (35)$$

$$W_2: x \rightarrow P^2(x) \exp(-2\varphi(x) + v_2^*(x) - \tilde{v}_2(x)), \forall x \in \mathcal{X}, \quad (36)$$

и

$$W_3: x \rightarrow 2\tilde{v}_1(x) - 2v_2^*(x) - \tilde{v}_2(x), \forall x \in \mathcal{X}, \quad (37)$$

где функция

$$\varphi: x \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + x_6}, \forall x \in \mathcal{X},$$

образуют автономный интегральный базис системы (34) на областях \mathcal{X} , содержащихся в множестве $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$.

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай а. Общий собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, не имеет комплексно сопряжённого вектора.

Тогда система (1.1) имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} W_1: x \rightarrow & \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{h_{0\xi}^* + h_{0, (k_1 + \xi)}^*} \exp\left(-2(\tilde{h}_{0\xi} - \tilde{h}_{0, (k_1 + \xi)})\varphi_{0\xi}(x) + \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left((h_{q\xi}^* + h_{q, (k_1 + \xi)}^*)v_{q\xi}^*(x) + (\tilde{h}_{q, (k_1 + \xi)} - \tilde{h}_{q\xi})\tilde{v}_{q\xi}(x)\right)\right). \end{aligned}$$

$$\cdot (P_{0,2k_1+1}(x))^{h_{0,(2k_1+1)}^*} \exp(-2\tilde{h}_{0,(2k_1+1)} \varphi_{0,2k_1+1}(x)) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} (\nu^{0\theta} x)^{2\tilde{h}_{0\theta}^*} \exp\left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \tilde{h}_{q\theta}^* v_{q\theta}(x)\right), \forall x \in \mathcal{X},$$

и

$$W_2: x \rightarrow \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{\tilde{h}_{0\xi} + \tilde{h}_{0,(k_1+\xi)}} \exp\left(2(\tilde{h}_{0\xi}^* - \tilde{h}_{0,(k_1+\xi)}^*) \varphi_{0\xi}(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left((\tilde{h}_{q\xi} + \tilde{h}_{q,(k_1+\xi)})^* v_{q\xi}(x) + (\tilde{h}_{q\xi}^* - \tilde{h}_{q,(k_1+\xi)}^*) \tilde{v}_{q\xi}(x)\right)\right).$$

$$\cdot (P_{0,2k_1+1}(x))^{\tilde{h}_{0,(2k_1+1)}} \exp(2\tilde{h}_{0,(2k_1+1)}^* \varphi_{0,2k_1+1}(x)) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} (\nu^{0\theta} x)^{2\tilde{h}_{0\theta}} \exp\left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \tilde{h}_{q\theta} v_{q\theta}(x)\right), \forall x \in \mathcal{X}, \mathcal{X} \subset DW_1 \cap DW_2,$$

где числа $h_{q\xi} = \tilde{h}_{q\xi}^* + \tilde{h}_{q\xi} i$, $h_{q\theta} = \tilde{h}_{q\theta}^* + \tilde{h}_{q\theta} i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, 2k_1+1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1} \left(\lambda_{\xi}^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right) + \lambda_{2k_1+1}^j h_{0,(2k_1+1)} +$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \left(\lambda_{\theta}^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta} \right) = 0, j = \overline{1, m},$$

где $\lambda_\xi^j = \lambda_\xi^{*j} + \tilde{\lambda}_\xi^j i$, $\lambda_{k_1+\xi}^j = \lambda_\xi^{*j} - \tilde{\lambda}_\xi^j i$, $\lambda_{2k_1+1}^j = \lambda_{2k_1+1}^{*j} + \tilde{\lambda}_{2k_1+1}^j i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и λ_θ^j , $\theta = \overline{1, k_2}$, — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют комплексные $\nu^{0\xi} = \nu^{*0\xi} + \tilde{\nu}^{0\xi} i$, $\nu^{0, (k_1+\xi)} = \overline{\nu^{0\xi}}$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\nu^{0, (2k_1+1)} = \nu^{*0, (2k_1+1)} + \tilde{\nu}^{0, (2k_1+1)} i$ и вещественные $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, собственные векторы, а при любых x из \mathcal{X}

$$\mu_{q\xi}^j = \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q\xi}^{*j} = \operatorname{Re} \mu_{q\xi}^j, \quad \tilde{\mu}_{q\xi}^j = \operatorname{Im} \mu_{q\xi}^j, \quad \mu_{q\theta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\theta}(x),$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, 2k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Функции

$$v_{q\xi} = \tilde{v}_{q\xi}^{*} + \tilde{v}_{q\xi} i \quad \text{и} \quad v_{q\theta},$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2},$$

находятся из системы (22), а числа ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} \varepsilon_\xi + \sum_{\theta=1}^{k_2} \varepsilon_\theta = m - 2k_1 - k_2 \quad \text{при} \quad 2k_1 + 1 + k_2 \leq r,$$

$\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\varepsilon_\theta \leq s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых собственных векторов, k_2 — количество вещественных собственных векторов матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пример 6. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 = & (1, -2, 2, 0, 1, 1)x dt_1 + (0, 2, 0, 0, 1, 1)x dt_2 + \\ & + (3, 0, 0, 0, -1, -1)x dt_3 + (1, -2, 4, 0, 2, 2)x dt_4, \\ dx_2 = & (0, 2, -2, 0, -2, -2)x dt_1 - (1, 3, 0, 0, 1, 1)x dt_2 + \\ & + (-1, 2, 0, 0, 1, 1)x dt_3 - (2, 1, 4, 0, 4, 4)x dt_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx_3 &= (0, 3, -2, 0, -2, -2)x dt_1 - (1, 3, 1, 0, 2, 2)x dt_2 + \\
&\quad + (-2, -1, 2, 0, 1, 1)x dt_3 - (3, -2, 7, 0, 5, 5)x dt_4, \\
dx_4 &= (0, -4, 0, 2, -2, 2)x dt_1 + (2, 2, 0, 1, 0, 4)x dt_2 + \\
&\quad + (1, 2, -2, 1, -1, -1)x dt_3 + (3, -4, 10, 2, 7, 7)x dt_4, \\
dx_5 &= (2, -3, 4, 2, 2, 4)x dt_1 + (3, 3, 2, 2, 1, 4)x dt_2 + \\
&\quad + (2, 1, -1, 0, 0, -1)x dt_3 + (3, -2, 9, 0, 7, 5)x dt_4, \\
dx_6 &= (-1, 3, -2, -2, 1, -1)x dt_1 - (2, 1, 2, 2, 1, 4)x dt_2 + \\
&\quad + (-1, -1, 1, 0, 1, 2)x dt_3 + (1, 4, -5, 0, -4, -2)x dt_4
\end{aligned} \tag{38}$$

вполне разрешима.

На основании собственных чисел $\lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 1 + i$, $\lambda_5^1 = 2i$, которым соответствуют элементарные делители $(\lambda^1 - 1 - i)^2$ и $\lambda^1 - 2i$, собственных $\nu^{01} = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$, $\nu^{02} = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$ и присоединённого $\nu^{11} = (1 + i, 0, 1 + i, 0, i, i)$ векторов строим на области \mathcal{X} функции

$$v_1^*: x \rightarrow ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3) + (x_2 + x_5 + x_6)(x_1 + x_3 + x_5 + x_6))P_1^{-1}(x),$$

$$\tilde{v}_1: x \rightarrow ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_5 + x_6) - (x_1 + x_3)(x_2 + x_5 + x_6))P_1^{-1}(x),$$

где $P_1: x \rightarrow (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_5 + x_6)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^6$.

Автономный интегральный базис на области \mathcal{X} системы (38) образуют скалярные функции

$$W_1: x \rightarrow P_1(x)P_2^2(x) \exp(-10\varphi_1(x) + 8v_1^*(x) + 6\tilde{v}_1(x)), \tag{39}$$

и

$$W_2: x \rightarrow P_1^3(x) \exp(-10\varphi_1(x) - 4\varphi_2(x) + 12v_1^*(x) + 14\tilde{v}_1(x)), \tag{40}$$

где $\mathcal{X} \subset \{x: x_1 + x_2 \neq 0, x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$, полином

$$P_2: x \rightarrow (x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 + (x_3 + x_5)^2, \forall x \in \mathbb{R}^6,$$

скалярные функции

$$\varphi_1: x \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_5 + x_6}{x_1 + x_2}, \quad \varphi_2: x \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + x_6}, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Случай б. Функция $v_{l\gamma}$, $\gamma \in \{1, \dots, k_1\}$, $l \in \{1, \dots, \varepsilon_\gamma\}$, не имеет комплексно сопряжённой функции.

Тогда у системы (1.1) существуют первые интегралы

$$\begin{aligned} W_1: x \rightarrow & \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{h_{0\xi}^* + h_{0,(k_1+\xi)}^*} \exp\left(-2(\tilde{h}_{0\xi} - \tilde{h}_{0,(k_1+\xi)})\varphi_{0\xi}(x) + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2(1 - \delta_{ql}\delta_{\xi\gamma})\left((h_{q\xi}^* + h_{q,(k_1+\xi)}^*)v_{q\xi}(x) + (\tilde{h}_{q,(k_1+\xi)} - \tilde{h}_{q\xi})\tilde{v}_{q\xi}(x)\right) + \\ & \left. + 2(h_{l\gamma}^* v_{l\gamma}(x) - \tilde{h}_{l\gamma}\tilde{v}_{l\gamma}(x))\right) \prod_{\theta=1}^{k_2} (\nu^{0\theta}x)^{2h_{0\theta}^*} \exp\left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} h_{q\theta}^* v_{q\theta}(x)\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W_2: x \rightarrow & \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{\tilde{h}_{0\xi} + \tilde{h}_{0,(k_1+\xi)}} \exp\left(2(h_{0\xi}^* - h_{0,(k_1+\xi)}^*)\varphi_{0\xi}(x) + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2(1 - \delta_{ql}\delta_{\xi\gamma})\left((\tilde{h}_{q\xi} + \tilde{h}_{q,(k_1+\xi)})v_{q\xi}(x) + (h_{q\xi}^* - h_{q,(k_1+\xi)}^*)\tilde{v}_{q\xi}(x)\right) + \\ & \left. + 2(h_{l\gamma}^* \tilde{v}_{l\gamma}(x) - \tilde{h}_{l\gamma}v_{l\gamma}(x))\right) \prod_{\theta=1}^{k_2} (\nu^{0\theta}x)^{2\tilde{h}_{0\theta}} \exp\left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \tilde{h}_{q\theta} v_{q\theta}(x)\right) \end{aligned}$$

на области \mathcal{X} из множества $\mathcal{X} \subset \operatorname{DW}_1 \cap \operatorname{DW}_2$, где комплексные числа $h_{q\xi} = h_{q\xi}^* + \tilde{h}_{q\xi}i$, $h_{q\theta} = h_{q\theta}^* + \tilde{h}_{q\theta}i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, 2k_1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1} \left(\lambda_{\xi}^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\xi}} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right) - \mu_{l, (k_1+\gamma)}^j h_{l, (k_1+\gamma)} +$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \left(\lambda_{\theta}^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\theta}} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

где $\lambda_{\xi}^j = \lambda_{\xi}^{*j} + \tilde{\lambda}_{\xi}^j i$, $\lambda_{k_1+\xi}^j = \overline{\lambda_{\xi}^j}$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и λ_{θ}^j , $\theta = \overline{1, k_2}$, есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют комплексные $\nu^{0\xi} = \nu^{*0\xi} + \tilde{\nu}^{0\xi} i$, $\nu^{0, (k_1+\xi)} = \overline{\nu^{0\xi}}$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и вещественные $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, собственные векторы, а числа

$$\mu_{q\xi}^j = \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q\xi}^{*j} = \operatorname{Re} \mu_{q\xi}^j, \quad \tilde{\mu}_{q\xi}^j = \operatorname{Im} \mu_{q\xi}^j, \quad \mu_{q\theta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\theta}(x)$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, 2k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Функции

$$v_{q\xi} = \tilde{v}_{q\xi}^{*} + \tilde{v}_{q\xi} i \quad \text{и} \quad v_{q\theta},$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2},$$

находятся из системы (22), а ε_{ξ} и ε_{θ} выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} \varepsilon_{\xi} + \sum_{\theta=1}^{k_2} \varepsilon_{\theta} = m - 2k_1 - k_2 + 2 \quad \text{при} \quad 2k_1 + k_2 \leq r,$$

$\varepsilon_{\xi} \leq s_{\xi} - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\varepsilon_{\theta} \leq s_{\theta} - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов, а k_2 — количество общих вещественных собственных векторов матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пример 7. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1 &= (3, -4, 4, 1, 0, 2)x \, dt_1 + (0, -4, 2, 1, -1, 1)x \, dt_2, \\
dx_2 &= (-1, 3, -3, 0, -2, -3)x \, dt_1 + (1, 3, 0, 0, 1, -1)x \, dt_2, \\
dx_3 &= (-3, 5, -5, -1, -2, -4)x \, dt_1 + (0, 6, -2, -1, 2, -1)x \, dt_2, \quad (41) \\
dx_4 &= (3, -6, 4, 4, -1, 5)x \, dt_1 + (2, -6, 2, 3, -4, 2)x \, dt_2, \\
dx_5 &= (5, -5, 8, 3, 3, 6)x \, dt_1 + (1, -6, 3, 2, -2, 2)x \, dt_2, \\
dx_6 &= (-2, 5, -4, -3, 1, -2)x \, dt_1 + (-2, 4, -3, -3, 2, -2)x \, dt_2
\end{aligned}$$

является вполне разрешимой.

На основании собственного числа $\lambda_1^1 = 1 + 2i$, которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1 - 2i)^3$ кратности три, собственного вектора $\nu^0 = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$ и присоединённых векторов $\nu^1 = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$, $\nu^2 = (2 + 2i, 0, 2 + 2i, 0, 2i, 2i)$ строим скалярные функции

$$W_1: x \rightarrow P(x) \exp(-\varphi(x) - \tilde{v}_1(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (42)$$

$$W_2: x \rightarrow P(x) \exp(-2\varphi(x) + 2^*v_1(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (43)$$

$$W_3: x \rightarrow P^2(x) \exp(-2\varphi(x) - \tilde{v}_2(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (44)$$

и

$$W_4: x \rightarrow v_2^*(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (45)$$

где функции P , φ , \tilde{v}_1 , v_1^* , \tilde{v}_2 и v_2^* такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен интегральный базис системы (34).

Эти скалярные функции, будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов системы (41) на областях \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$.

3. Неавтономные первые интегралы

Построение неавтономных первых интегралов на основании автономных первых интегралов.

Система (1.1) индуцирует линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{P}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{p}_j(x), \quad \forall(t, x) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad j = \overline{1, m},$$

которые назовём операторами дифференцирования в силу системы (1.1), а их действие — производными Ли в силу системы (1.1).

С целью построения базиса первых интегралов дифференциальной системы (1.1) (размерность которого n) достаточно к автономному интегральному базису (размерность которого $n - m$) этой системы добавить m неавтономных первых интегралов системы (1.1) таких, что полученная совокупность n первых интегралов будет функционально независимой на некоторой области \mathcal{D} из пространства \mathbb{R}^{m+n} .

Такая процедура всякий раз может быть осуществлена на основании следующих закономерностей.

Теорема 1. Пусть ν — общий вещественный собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1) является функция

$$W: (t, x) \rightarrow (\nu x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda^j t_j\right), \quad \forall(t, x) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad (1)$$

где λ^j , $j = \overline{1, m}$, — вещественные собственные числа матриц A_j , которым соответствует собственный вектор ν .

Доказательство. Действительно, с учётом леммы 1.1 производные Ли в силу системы (1.1) функции (1) на \mathbb{R}^{n+m} равны

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_j W(t, x) &= \partial_{t_j} W(t, x) + \mathfrak{p}_j W(t, x) = \\ &= (-\lambda^j + \lambda^j) W(t, x) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 1 (продолжение примера 1.2). На основании собственных чисел

$$\lambda_1^1 = -2, \lambda_1^2 = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_2^1 = 0, \lambda_2^2 = -1$$

и соответствующих им собственных векторов

$$\nu^1 = (0, -1, 1, 1) \quad \text{и} \quad \nu^2 = (1, 0, 0, 0),$$

строим (по теореме 1) первые интегралы

$$W_1: (t, x) \rightarrow (-x_2 + x_3 + x_4) \exp(2t_1 - t_2), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^6,$$

и

$$W_2: (t, x) \rightarrow x_1 \exp t_2, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^6,$$

системы (4.2).

Скалярные функции (5.2), (6.2), W_1 и W_2 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (4.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} есть область из множества $\{x: x_1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^4 .

Следствие 1. Пусть $\nu = \nu^* + \tilde{\nu}i$ — общий комплексный собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы (1.1) являются скалярные функции

$$W_1: (t, x) \rightarrow ((\nu^*x)^2 + (\tilde{\nu}x)^2) \exp\left(-\sum_{j=1}^m 2\lambda_j^* t_j\right), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

и

$$W_2: (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\nu}x}{\nu^*x} - \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}^j t_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

где $\lambda^j = \lambda^j + \tilde{\lambda}^j i$ — собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствует собственный вектор ν .

Пример 2 (продолжение примера 2.2). На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = 1$ и $\lambda_1^2 = -i$ и соответствующего им общего комплексного собственного вектора $\nu^1 = (1, i, 0)$ строим первые интегралы вполне разрешимой системы (14.2):

$$W_1: (t, x) \rightarrow (x_1^2 + x_2^2) \exp(-2t_1), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^5,$$

и

$$W_2: (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}.$$

Функции (15.2), W_1 и W_2 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (14.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} есть область из множества $\{x: x_1 \neq 0, x_3 \neq 0\}$.

Пример 3 (продолжение примера 3.2). На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = -1$ и $\lambda_1^2 = -i$ и соответствующего им общего комплексного собственного вектора $\nu^1 = (0, -i, 0, 1)$ строим (следствие 1) первые интегралы вполне разрешимой системы (18.2):

$$W_3: (t, x) \rightarrow (x_2^2 + x_4^2) \exp(2t_1), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^6,$$

и

$$W_4: (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_4} - t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}.$$

Функции (19.2), W_3 и W_4 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов дифференциальной системы (18.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} есть область из множества $\{x: x_4 \neq 0\}$.

Теорема 2. Пусть ν^0 и ν^θ , $\theta = \overline{1, s-1}$, — общий вещественный собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ , которые соответствуют собственному числу λ^ζ , имеющему элементарный делитель кратности $s \geq 2$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.1) являются функции

$$W_q: (t, x) \rightarrow v_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^m \mu_{q\zeta}^j t_j, \forall (t, x) \in \mathcal{D}, q = \overline{1, s-1}, \quad (2)$$

где функции $v_{q\zeta}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ находятся из системы (22.2), числа

$$\mu_{q\zeta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\zeta}(x), \forall x \in \mathcal{X}, q = \overline{1, s-1}, j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Производные Ли функций (2) в силу дифференциальной системы (1.1)

$$\mathfrak{P}_j W_q(t, x) = \partial_{t_j} W_q(t, x) + \mathfrak{p}_j W_q(t, x) = -\mu_{q\zeta}^j + \mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x),$$

$$\forall(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}, q = \overline{1, s-1}.$$

Учитывая, что

$$\mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x) = \mu_{q\zeta}^j, \forall x \in \mathcal{X}, j = \overline{1, m}, q = \overline{1, s-1},$$

получаем, что функции (2) являются первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.1). ■

Пример 4 (продолжение примера 4.2). По теореме 2, учитывая, что

$$\mathfrak{p}_1 v_1(x) \equiv 1, \mathfrak{p}_1 v_3(x) \equiv 0, \mathfrak{p}_2 v_1(x) \equiv -1, \mathfrak{p}_2 v_3(x) \equiv 6,$$

строим первые интегралы системы (32.2):

$$W_3: (t, x) \rightarrow v_1(x) - t_1 + t_2, \forall(t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

и

$$W_4: (t, x) \rightarrow v_3(x) - 6t_2, \forall(t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где функции v_1 и v_2 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный интегральный базис системы (32.2), а \mathcal{X} — область из множества $\{x: x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^4 .

Скалярные функции (33.2), W_3 и W_4 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (32.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Следствие 2. Пусть ν^0 и ν^θ , $\theta = \overline{1, s-1}$, — общий комплексный собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ , которые соответствуют существенно комплексному собственному числу λ^ζ , имеющему элементарный делитель кратности $s \geq 2$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.1) являются скалярные функции

$$W_{1q}: (t, x) \rightarrow v_{q\zeta}^*(x) - \sum_{j=1}^m \mu_{q\zeta}^j t_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad q = \overline{1, s-1},$$

и

$$W_{2q}: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_{q\zeta}^j t_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad q = \overline{1, s-1},$$

где функции $v_{q\zeta}: x \rightarrow v_{q\zeta}^*(x) + \tilde{v}_{q\zeta}(x)i$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, находятся из системы (22.2), вещественные числа

$$\mu_{q\zeta}^j = \mathbf{p}_j^* v_{q\zeta}^*(x), \quad \tilde{\mu}_{q\zeta}^j = \mathbf{p}_j \tilde{v}_{q\zeta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, s-1}.$$

Пример 5 (продолжение примера 5.2). Для вполне разрешимой дифференциальной системы (34.2) на основании следствия 2 строим на областях $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{X}$ первые интегралы

$$W_{11}: (t, x) \rightarrow v_1^*(x) - t_1 - t_2, \quad W_{21}: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_1(x) + t_2 - t_3$$

и

$$W_{12}: (t, x) \rightarrow v_2^*(x) - 2t_3,$$

где скалярные функции v_1^* , \tilde{v}_1 и v_2^* такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен базис автономных первых интегралов системы (34.2), а \mathcal{X} — область из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^6 .

Функции (35.2) – (37.2), W_{11} , W_{21} и W_{12} , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (34.2) на областях $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{X}$.

Пример 6 (продолжение примера 6.2). Для вполне разрешимой дифференциальной системы (38.2) на основании общего комплексного собственного вектора $\nu^{01} = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$, соответствующего собственным числам $\lambda_1^1 = 1 + i$, $\lambda_1^2 = -1$, $\lambda_1^3 = 2$ и $\lambda_1^4 = -1 + 2i$, строим (следствие 1) первые интегралы

$$W_3: (t, x) \rightarrow ((x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_5 + x_6)^2) \exp(-2t_1 + 2t_2 - 4t_3 + 2t_4),$$

$$W_4: (t, x) \rightarrow \arctg \frac{x_2 + x_5 + x_6}{x_1 + x_2} - t_1 - 2t_4$$

на областях $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{X}'$, где \mathcal{X}' — произвольная область из множества $\{x: x_1 + x_2 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^6 .

По следствию 2 строим первые интегралы

$$W_5: (t, x) \rightarrow {}^*v_1(x) - t_1 + t_3 - t_4, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

и

$$W_6: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_1(x) - t_2 - t_4, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

где функции *v_1 и \tilde{v}_1 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный интегральный базис дифференциальной системы (38.2), а \mathcal{X} есть область из множества $\{x: x_1 + x_2 \neq 0, x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^6$.

Скалярные функции (39.2), (40.2), $W_3 - W_6$, будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис системы (38.2) на областях $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{X}$.

Пример 7 (продолжение примера 7.2). Для вполне разрешимой системы (41.2) на основании следствия 2 строим первые интегралы

$$W_5: (t, x) \rightarrow {}^*v_1(x) - t_1 - t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

и

$$W_6: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_1(x) + t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где функции *v_1 и \tilde{v}_1 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис системы (34.2), а \mathcal{X} есть область из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^6 .

Скалярные функции (42.2) – (45.2), W_5 и W_6 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (41.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

§ 5. Интегралы автономной системы Якоби в полных дифференциалах

1. Линейный частный интеграл

Автономная система Якоби в полных дифференциалах. Интегральная характеристическая система. Линейный однородный частный интеграл.

Рассмотрим автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = J(x) dt, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_m)$ — точки из \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно, векторы-столбцы $dx = \text{colon}(dx_1, \dots, dx_n)$ и $dt = \text{colon}(dt_1, \dots, dt_m)$, элементами матрицы $J(x) = \|J_{ij}(x)\|$ (n строк, m столбцов) являются функции

$$J_{ij} : x \rightarrow a_{ji}(x) - x_i a_{j,n+1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

а линейные неоднородные функции

$$a_{j\tau} : x \rightarrow \sum_{i=1}^n a_{j\tau i} x_i + a_{j\tau, n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad \tau = \overline{1, n+1},$$

имеют вещественные коэффициенты $a_{j\tau\delta}$, $j = \overline{1, m}$, $\tau = \overline{1, n+1}$, $\delta = \overline{1, n+1}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^n |a_{j, n+1, i}| \neq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Систему (1) будем называть *системой Якоби в полных дифференциалах*.

Дифференциальная система (1) индуцирует автономные линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{p}_j(x) = \sum_{i=1}^n J_{ij}(x) \partial_{x_i}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

которые не являются линейно связанными на \mathbb{R}^n . При этом по необходимости $m < n$.

Для линейной неоднородной функции

$$p: x \rightarrow \sum_{i=1}^n \nu_i x_i + \nu_{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\nu_\tau \in \mathbb{K}, \quad \tau = \overline{1, n+1}), \quad (3)$$

где \mathbb{K} — поле вещественных \mathbb{R} или комплексных \mathbb{C} чисел, производные Ли в силу системы (1) на \mathbb{R}^n

$$\mathfrak{p}_j p(x) = -a_{j, n+1}(x) p(x) + \sum_{\tau=1}^{n+1} \nu_\tau a_{j\tau}(x), \quad j = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Тогда постоянные ν_τ , $\tau = \overline{1, n+1}$, будем искать такими, что

$$\sum_{\tau=1}^{n+1} \nu_\tau a_{j\tau}(x) = \lambda^j p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Выполнение системы тождеств (4) при условиях (5), то есть, системы тождеств

$$\mathfrak{p}_j p(x) = p(x) (-a_{j, n+1}(x) + \lambda^j), \quad \lambda^j \in \mathbb{K}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

означает (определение 1.1.3), что функция p является автономным полиномиальным частным интегралом системы (1).

Система тождеств (5) распадается на линейную систему

$$(A_j - \lambda^j E) \nu = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $\nu = \text{colon}(\nu_1, \dots, \nu_{n+1})$, E — единичная матрица, квадратные матрицы $A_j = \|a_{j\delta\tau}\|$ имеют размер $n+1$, и их столбцы составляют коэффициенты линейных неоднородных функций $a_{j\tau}$, $j = \overline{1, m}$, $\tau = \overline{1, n+1}$.

Систему

$$\det (A_j - \lambda^j E) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8)$$

назовём *интегральной характеристической системой*, а её корни — *интегральными характеристическими корнями* дифференциальной системы (1).

Систему Якоби (1) будем рассматривать при условии её полной разрешимости.

Условия Фробениуса

$$[\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_\zeta(x)] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j, \zeta = \overline{1, m},$$

полной разрешимости системы (1) равносильны перестановочности матриц:

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \quad j, \zeta = \overline{1, m}.$$

Лемма 1. Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n+1})$ — общий собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда функция (3) является частным интегралом вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1).

Эта лемма корректна ввиду того, что у матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, элементы $a_{j, n+1, i}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, одновременно не равны нулю, а значит, у матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, нет собственного вектора $(0, \dots, 0, \nu_{n+1})$ при $\nu_{n+1} \neq 0$.

Действительно, если бы числа

$$\nu_1 = \dots = \nu_n = 0, \quad \nu_{n+1} \neq 0,$$

были решением системы (7), где λ^j — собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствует собственный вектор ν , то

$$a_{j, n+1, i} \nu_{n+1} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

т.е.

$$a_{j, n+1, i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

что противоречит условию (2).

2. Автономный базис первых интегралов

Построение автономных первых интегралов по собственным векторам матриц коэффициентов системы Якоби.

2.1. Случай вещественных интегральных характеристических корней

Введём обозначения:

$$\nu^k = (\nu_1^k, \dots, \nu_{n+1}^k), \quad p_k(x) = \sum_{i=1}^n \nu_i^k x_i + \nu_{n+1}^k.$$

Теорема 1. Пусть $\nu^k, k = \overline{1, m+2}$, — общие вещественные линейно независимые собственные векторы матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда функция

$$W: x \rightarrow \prod_{k=1}^{m+2} |p_k(x)|^{h_k}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (1)$$

где вещественные числа $h_k, k = \overline{1, m+2}$, являются нетривиальным решением линейной однородной системы

$$\sum_{k=1}^{m+2} h_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{m+2} \lambda_k^j h_k = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

коэффициентами которой являются вещественные собственные числа λ_k^j матриц $A_j, j = \overline{1, m}$, соответствующие собственным векторам $\nu^k, k = \overline{1, m+2}$, на любой области \mathcal{X} из множества определения DW является первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1).

Доказательство. Пусть $\nu^k, k = \overline{1, m+2}$, — общие вещественные собственные векторы матриц A_1, \dots, A_m . Тогда у этих матриц существуют собственные числа $\lambda_k^j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, m}$, соответствующие собственным векторам $\nu^k, k = \overline{1, m+2}$.

Согласно лемме 1.1 линейные функции

$$p_k : x \rightarrow p_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{1, m+2},$$

будут частными интегралами системы (1.1), при этом

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j p_k(x) &= p_k(x) (-a_{j,n+1}(x) + \lambda_k^j), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ j &= \overline{1, m} \quad k = \overline{1, m+2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Составим функцию (1) и вычислим её производные Ли в силу системы (1.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j W(x) &= \prod_{k=1}^{m+2} |p_k(x)|^{h_k-1} \cdot \sum_{k=1}^{m+2} \operatorname{sgn} p_k(x) h_k \prod_{l=1, l \neq k}^{m+2} |p_l(x)| \mathfrak{p}_j p_k(x), \\ \forall x \in \mathcal{X}, \quad j &= \overline{1, m}. \end{aligned}$$

В силу тождеств (3) устанавливаем, что на области \mathcal{X}

$$\mathfrak{p}_j W(x) = \left(-a_{j,n+1}(x) \sum_{k=1}^{m+2} h_k + \sum_{k=1}^{m+2} \lambda_k^j h_k \right) W(x), \quad j = \overline{1, m}.$$

Если числа $h_k, k = \overline{1, m+2}$, являются нетривиальным решением линейной однородной системы (2), то функция (1) будет первым интегралом на области \mathcal{X} системы (1.1). ■

Следствие 1. Пусть $\nu^k, k = \overline{1, m+2}$, — общие вещественные линейно независимые собственные векторы матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом на области \mathcal{X} вполне разрешимой системы (1.1) будет функция

$$W_{12\dots(m+1)(m+2)} : x \rightarrow \prod_{l=1}^{m+1} |p_l(x)|^{-\Delta_l} |p_{m+2}(x)|^{\Delta}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

где определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_{m+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_{m+1}^m \end{vmatrix},$$

определители Δ_l , $l = \overline{1, m+1}$, получены заменой в определителе Δ l -го столбца на столбец $\text{colon}(1, \lambda_{m+2}^1, \dots, \lambda_{m+2}^m)$, $\lambda_k^j \in \mathbb{R}$ — собственные числа матриц A_j , которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = \overline{1, m+2}$, $j = \overline{1, m}$.

Пример 1. Построим базис автономных первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 - x_1(-5x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 1))dt_1 + \\ &\quad + (-2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5 - x_1(-7x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2))dt_2, \\ dx_2 &= (4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_2(-5x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 1))dt_1 + \\ &\quad + (6x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_2(-7x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2))dt_2, \\ dx_3 &= (-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3 - x_3(-5x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 1))dt_1 + \\ &\quad + (-x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 5 - x_3(-7x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2))dt_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрицы

$$A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 & -5 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -1 & -7 \\ -4 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & -4 & -7 \\ -5 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

перестановочны, а значит, система (4) вполне разрешима.

Собственными числами матриц A_1 и A_2 соответственно будут

$$\lambda_1^1 = -2, \lambda_2^1 = -2, \lambda_3^1 = 1, \lambda_4^1 = 2$$

и

$$\lambda_1^2 = -3, \lambda_2^2 = -3, \lambda_3^2 = 2, \lambda_4^2 = 3,$$

их находим как корни интегральных характеристических уравнений

$$\det(A_1 - \lambda^1 E) = 0 \iff (\lambda^1 + 2)^2(\lambda^1 - 1)(\lambda^1 - 2) = 0,$$

$$\det(A_2 - \lambda^2 E) = 0 \iff (\lambda^2 + 3)^2(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 - 3) = 0.$$

Матрицы A_1 и A_2 приведём к нормальным жордановым формам

$$J_1 = \text{diag} \{ -2, -2, 1, 2 \} \quad \text{и} \quad J_2 = \text{diag} \{ -3, -3, 2, 3 \}$$

так, чтобы в представлениях $A_1 = B_1 J_1 B_1^{-1}$ и $A_2 = B_2 J_2 B_2^{-1}$ матрицы перехода B_1 и B_2 были равными, например:

$$B_1 = B_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Следовательно, общими линейно независимыми собственными векторами матриц A_1 и A_2 будут

$$\nu^1 = (1, 1, 0, 1), \nu^2 = (2, 1, 1, 1), \nu^3 = (1, 2, 1, 1) \quad \text{и} \quad \nu^4 = (1, 1, 1, 0).$$

Решением линейной однородной системы

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0, \\ \lambda_1^1 h_1 + \lambda_2^1 h_2 + \lambda_3^1 h_3 + \lambda_4^1 h_4 = 0, \\ \lambda_1^2 h_1 + \lambda_2^2 h_2 + \lambda_3^2 h_3 + \lambda_4^2 h_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0, \\ -2h_1 - 2h_2 + h_3 + 2h_4 = 0, \\ -3h_1 - 3h_2 + 2h_3 + 3h_4 = 0 \end{cases}$$

будут, например, числа

$$h_1 = 1, \quad h_2 = -1, \quad h_3 = 0, \quad h_4 = 0.$$

Тогда функция

$$W: x \rightarrow \frac{x_1 + x_2 + 1}{2x_1 + x_2 + x_3 + 1}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (5)$$

образует на областях \mathcal{X} из множества $\{x: 2x_1 + x_2 + x_3 + 1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^3 базис автономных первых интегралов системы (4).

2.2. Случай комплексных интегральных характеристических корней

В случае, когда полином (3.1) — комплекснозначный частный интеграл дифференциальной системы (1.1), система тождеств (6.1) распадается на вещественную систему тождеств

$$\begin{aligned} p_j \operatorname{Re} p(x) &= \operatorname{Re} p(x) (-a_{j,n+1}(x) + \lambda^j) - \operatorname{Im} p(x) \tilde{\lambda}^j, \\ p_j \operatorname{Im} p(x) &= \operatorname{Re} p(x) \tilde{\lambda}^j + \operatorname{Im} p(x) (-a_{j,n+1}(x) + \lambda^j), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda^j &= \lambda^j + \tilde{\lambda}^j i, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Имеет место следующий критерий существования комплекснозначного частного интеграла у системы (1.1).

Лемма 1. *Линейная неоднородная функция (3.1) является комплекснозначным частным интегралом системы (1.1), если и только если выполняется система тождеств (6).*

С учётом этого критерия устанавливаем следующие закономерности относительно комплекснозначного частного интеграла дифференциальной системы (1.1).

Свойство 1. *Если дифференциальная система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл (3.1), то комплексно сопряжённая функция \bar{p} также является комплекснозначным частным интегралом системы (1.1). При этом наряду с системой тождеств (6.1) имеет место система тождеств*

$$p_j \bar{p}(x) = \bar{p}(x) (-a_{j,n+1}(x) + \overline{\lambda^j}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m},$$

где $\overline{\lambda^j}, j = \overline{1, m}$, комплексно сопряжены соответственно с числами $\lambda^j, j = \overline{1, m}$, из соотношений (6.1).

Свойство 2. *Если система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл (3.1), то вещественный полином*

$$P: x \rightarrow \operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

является частным интегралом системы (1.1) и выполняется

система тождеств

$$\mathbf{p}_j P(x) = 2P(x) \left(-a_{j,n+1}(x) + \lambda^j \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m},$$

где числа $\lambda^j = \lambda^j + \tilde{\lambda}^j i$, $j = \overline{1, m}$, находим из тождеств (6.1).

Свойство 3. Пусть система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл (3.1). Тогда производные Ли в силу дифференциальной системы (1.1) экспоненциальной функции

$$\psi: x \rightarrow \exp \varphi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

при

$$\varphi: x \rightarrow \arctg \frac{\operatorname{Im} p(x)}{\operatorname{Re} p(x)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (8)$$

равны

$$\mathbf{p}_j \exp \varphi(x) = \exp \varphi(x) \tilde{\lambda}^j, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

где числа $\lambda^j = \lambda^j + \tilde{\lambda}^j i$, $j = \overline{1, m}$, находим из тождеств (6.1), область \mathcal{X} из пространства \mathbb{R}^n такова, что её дополнение до \mathbb{R}^n включает множество всех нулей функции $\operatorname{Re} p$.

Из тождеств (9) следует формула вычисления производных Ли в силу системы (1.1) функции аргумента (8) комплекснозначного частного интеграла (3.1) этой системы:

$$\mathbf{p}_j \varphi(x) = \tilde{\lambda}^j, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Свойство 4. Произведение $u_1 u_2$ полиномов $u_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ и $u_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$, где \mathbb{K} — поле вещественных \mathbb{R} или комплексных \mathbb{C} чисел, является частным интегралом (вещественным или комплекснозначным) системы (1.1) тогда и только тогда, когда его сомножители u_1 и u_2 являются частными интегралами дифференциальной системы (1.1).

Свойство 5. Вещественный полином (7) является частным интегралом системы (1.1), если и только если система (1.1) имеет комплекснозначный частный интеграл (3.1) (или комплексно сопряжённый ему).

Дополнительно введём обозначения:

$$p_k^*(x) = \sum_{i=1}^n \nu_i^* x_i + \nu_{n+1}^*, \quad \tilde{p}_k(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{\nu}_i^* x_i + \tilde{\nu}_{n+1}^*,$$

$$P_k(x) = (p_k^*(x))^2 + (\tilde{p}_k(x))^2, \quad \varphi_k(x) = \arctg \frac{\tilde{p}_k(x)}{p_k^*(x)}.$$

Теорема 2. Пусть $\nu^k, \nu_\tau^k = \nu_\tau^* + \tilde{\nu}_\tau^* i, \tau = \overline{1, n+1}, k = \overline{1, s}, s \leq (m+2)/2$, и $\nu^\theta, \theta = \overline{s+1, m+2-s}$, — соответственно общие линейно независимые комплексные (среди которых нет комплексно сопряжённых) и вещественные собственные векторы матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом на области \mathcal{X} вполне разрешимой системы (1.1) будет функция

$$W: x \rightarrow \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{h_k^*} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \prod_{\theta=s+1}^{m+2-s} |p_\theta(x)|^{h_\theta}, \quad (10)$$

где \mathcal{X} есть область из множества определения DW, вещественные числа $h_k^*, \tilde{h}_k, k = \overline{1, s}$, и $h_\theta, \theta = \overline{s+1, m+2-s}$, составляют нетривиальное решение линейной системы

$$2 \sum_{k=1}^s h_k^* + \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} h_\theta = 0, \quad (11)$$

$$2 \sum_{k=1}^s (\lambda_k^j h_k^* - \tilde{\lambda}_k^j \tilde{h}_k) + \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} \lambda_\theta^j h_\theta = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

где $\lambda_k^j = \lambda_k^j + \tilde{\lambda}_k^j i, k = \overline{1, s}$, и $\lambda_\theta^j, \theta = \overline{s+1, m+2-s}$, есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j, j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^k, k = \overline{1, s}$, и $\nu^\theta, \theta = \overline{s+1, m+2-s}$.

Доказательство. В соответствии с условием теоремы у матриц A_j существуют комплексные λ_k^j и вещественные λ_θ^j , $j = \overline{1, m}$, собственные числа, которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = \overline{1, s}$, и ν^θ , $\theta = \overline{s+1, m+2-s}$.

Согласно лемме 1.1 и свойству 1 линейные функции

$$p_k: x \rightarrow p_k^*(x) + \tilde{p}_k(x)i, \quad \overline{p_k}: x \rightarrow \overline{p_k^*(x) - \tilde{p}_k(x)i}, \quad p_\theta: x \rightarrow p_\theta(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{1, s}, \quad \theta = \overline{s+1, m+2-s},$$

являются частными интегралами системы (1.1).

Значит, на пространстве \mathbb{R}^n выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j p_k^*(x) &= p_k^*(x) (-a_{j,n+1}(x) + \lambda_k^j) - \tilde{p}_k(x) \tilde{\lambda}_k^j, \\ \mathfrak{p}_j \tilde{p}_k(x) &= p_k^*(x) \tilde{\lambda}_k^j + \tilde{p}_k(x) (-a_{j,n+1}(x) + \lambda_k^j), \\ \mathfrak{p}_j p_k(x) &= (-a_{j,n+1}(x) + \lambda_k^j) p_k(x), \\ j &= \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}, \quad \theta = \overline{s+1, m+2-s}. \end{aligned} \tag{12}$$

Составим функцию (10) и вычислим её производные Ли в силу системы (1.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j W(x) &= \left(\prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\tilde{h}_k^* - 1} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sum_{k=1}^s \tilde{h}_k^* \prod_{l=1, l \neq k}^s P_l(x) \mathfrak{p}_j P_k(x) + \\ &\quad \left. + \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\tilde{h}_k^*} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \sum_{k=1}^s \mathfrak{p}_j (-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{\theta=s+1}^{m+2-s} |p_{\theta}(x)|^{h_{\theta}} + \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{*\tilde{h}_k} \exp(-2\tilde{h}_k \varphi_k(x)) \prod_{\theta=s+1}^{m+2-s} |p_{\theta}(x)|^{h_{\theta}-1} \\
& \cdot \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} \operatorname{sgn} p_{\theta}(x) h_{\theta} \prod_{l=s+1, l \neq \theta}^{m+2-s} |p_l(x)| p_j p_{\theta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

Отсюда на основании тождеств (12) и свойств 2, 3 получаем, что на области \mathcal{X}

$$\begin{aligned}
p_j W(x) = & \left(-a_{j,n+1}(x) \left(2 \sum_{k=1}^s h_k^* + \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} h_{\theta} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{k=1}^s (\lambda_k^j h_k^* - \tilde{\lambda}_k^j \tilde{h}_k) + \sum_{\theta=s+1}^{m+2-s} \lambda_{\theta}^j h_{\theta} \right) W(x), \quad j = \overline{1, m}.
\end{aligned}$$

Если числа $h_k^*, \tilde{h}_k, k = \overline{1, s}$, и $h_{\theta}, \theta = \overline{s+1, m+2-s}$, составляют нетривиальное решение системы (11), то функция (10) будет первым интегралом на области \mathcal{X} системы (1.1). ■

Пример 2. Рассмотрим вполне разрешимую систему

$$\begin{aligned}
dx_1 = & (x_1 - 2x_2 - x_3 - x_1(3x_2 + 2x_3 + 1)) dt_1 + \\
& + (-x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_1(6x_2 + 4x_3 - 1)) dt_2, \\
dx_2 = & (2x_1 + x_2 + 1 - x_2(3x_2 + 2x_3 + 1)) dt_1 + \\
& + (4x_1 - x_2 + 2 - x_2(6x_2 + 4x_3 - 1)) dt_2, \\
dx_3 = & (-3x_1 + x_3 - 2 - x_3(3x_2 + 2x_3 + 1)) dt_1 + \\
& + (-6x_1 - x_3 - 4 - x_3(6x_2 + 4x_3 - 1)) dt_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

По общим линейно независимым собственным векторам

$$\nu^1 = (2, i, 0, 1), \quad \nu^2 = (-i, 2, 1, 0), \quad \nu^3 = (2, -i, 0, 1), \quad \nu^4 = (i, 2, 1, 0)$$

и соответствующим комплексным собственным числам

$$\lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 1+i, \quad \lambda_4^1 = \lambda_3^1 = 1-i; \quad \lambda_2^2 = \lambda_1^2 = -1+2i, \quad \lambda_4^2 = \lambda_3^2 = -1-2i$$

строим (теорема 2) базис автономных первых интегралов

$$W: x \rightarrow \frac{((2x_1 + 1)^2 + x_2^2) \exp\left(-2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{2x_2 + x_3}\right)}{((2x_2 + x_3)^2 + x_1^2) \exp\left(2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{2x_1 + 1}\right)}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (14)$$

на областях \mathcal{X} из множества $\{x: 2x_1 + 1 \neq 0, 2x_2 + x_3 \neq 0\}$.

Теорема 3. Пусть $\nu^{2k-1}, \nu^{2k}, \nu^{2s+1}$, где $\nu_\tau^{2k-1} = \tilde{\nu}_\tau^k + \tilde{\nu}_\tau^k i$, $\nu_\tau^{2k} = \tilde{\nu}_\tau^k - \tilde{\nu}_\tau^k i$, $k = \overline{1, s}$, $s \leq (m+1)/2$, $\nu_\tau^{2s+1} = \tilde{\nu}_\tau^{2s+1} + \tilde{\nu}_\tau^{2s+1} i$, $\tau = \overline{1, n+1}$, и ν^θ , $\theta = \overline{2s+2, m+2}$, — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда первыми интегралами на области \mathcal{X} вполне разрешимой системы (1.1) будут функции

$$W_1: x \rightarrow \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\tilde{h}_{2k-1}^* + \tilde{h}_{2k}^*} \exp(-2(\tilde{h}_{2k-1} - \tilde{h}_{2k})\varphi_k(x)) \cdot \\ \cdot (P_{2s+1}(x))^{\tilde{h}_{2s+1}^*} \exp(-2\tilde{h}_{2s+1}\varphi_{2s+1}(x)) \prod_{\theta=2s+2}^{m+2} p_\theta^{2\tilde{h}_\theta}(x) \quad (15)$$

и

$$W_2: x \rightarrow \prod_{k=1}^s (P_k(x))^{\tilde{h}_{2k-1} + \tilde{h}_{2k}} \exp(2(\tilde{h}_{2k-1}^* - \tilde{h}_{2k}^*)\varphi_k(x)) \cdot \\ \cdot (P_{2s+1}(x))^{\tilde{h}_{2s+1}} \exp(2\tilde{h}_{2s+1}^*\varphi_{2s+1}(x)) \prod_{\theta=2s+2}^{m+2} p_\theta^{2\tilde{h}_\theta}(x), \quad (16)$$

где $\mathcal{X} \subset DW_1 \cap DW_2$, числа $h_k = \overset{*}{h}_k + \widetilde{h}_k i$, $k = \overline{1, m+2}$, составляют нетривиальное решение линейной системы (2) с коэффициентами $\lambda_{2k-1}^j = \overset{*}{\lambda}_k^j + \widetilde{\lambda}_k^j i$, $\lambda_{2k}^j = \overset{*}{\lambda}_k^j - \widetilde{\lambda}_k^j i$, $k = \overline{1, s}$, $\lambda_{2s+1}^j = \overset{*}{\lambda}_{2s+1}^j + \widetilde{\lambda}_{2s+1}^j i$ и λ_θ^j , $\theta = \overline{2s+2, m+2}$, которые являются комплексными и вещественными собственными числами матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, соответствующими собственным векторам ν^k , $k = \overline{1, m+2}$.

Доказательство. Построим две функции на области \mathcal{X} :

$$\overset{*}{W}: x \rightarrow \prod_{k=1}^s p_k^{h_{2k-1}}(x) \overline{p_k^{h_{2k}}}(x) \cdot p_{2s+1}^{h_{2s+1}}(x) \prod_{\theta=2s+2}^{m+2} |p_\theta(x)|^{h_\theta},$$

$$\overset{**}{W}: x \rightarrow \prod_{k=1}^s \overline{p_k^{h_{2k}}}(x) \overline{p_k^{h_{2k-1}}}(x) \cdot \overline{p_{2s+1}^{h_{2s+1}}}(x) \prod_{\theta=2s+2}^{m+2} |p_\theta(x)|^{\overline{h_\theta}},$$

где $h_k = \overset{*}{h}_k + \widetilde{h}_k i$, $k = \overline{1, m+2}$, — некоторые комплексные числа, одновременно не равные нулю.

Производные Ли в силу системы (1.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j^* \overset{*}{W}(x) = & \left(-a_{j, n+1}(x) \sum_{k=1}^{m+2} h_k + \sum_{k=1}^s \left(\lambda_{2k-1}^j h_{2k-1} + \overline{\lambda_{2k-1}^j} h_{2k} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_{2s+1}^j h_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+2} \lambda_\theta^j h_\theta \right) \overset{*}{W}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j^{**} \overset{**}{W}(x) = & \left(-a_{j, n+1}(x) \sum_{k=1}^{m+2} \overline{h_k} + \sum_{k=1}^s \left(\lambda_{2k-1}^j \overline{h_{2k}} + \overline{\lambda_{2k-1}^j} \overline{h_{2k-1}} \right) + \right. \\ & \left. + \overline{\lambda_{2s+1}^j} \overline{h_{2s+1}} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+2} \lambda_\theta^j \overline{h_\theta} \right) \overset{**}{W}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Если числа h_k , $k = \overline{1, m+2}$, составляют нетривиальное решение системы (2), то

$$\mathbf{p}_j^* W(x) = \mathbf{p}_j^{**} W(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}, j = \overline{1, m}.$$

А значит, функции W^* и W^{**} являются первыми комплексно-значными интегралами вполне разрешимой системы (1.1).

Положив на области \mathcal{X}

$$W_1(x) = W^*(x) W^{**}(x) \quad \text{и} \quad W_2(x) = W^{*-i}(x) W^{**i}(x),$$

получим первые интегралы (15) и (16) соответственно. ■

Пример 3. Рассмотрим вполне разрешимую систему

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(\frac{1}{2} x_1 + x_2 - x_1 a_{14}(x) \right) dt_1 + (2x_1 + 2x_2 - x_1 a_{24}(x)) dt_2, \\ dx_2 &= \left(-\frac{5}{4} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - x_2 a_{14}(x) \right) dt_1 + \left(-\frac{5}{2} x_1 - x_2 a_{24}(x) \right) dt_2, \\ dx_3 &= \left(\frac{5}{8} x_1 + \frac{3}{4} x_2 + x_3 + \frac{1}{2} x_3 a_{14}(x) \right) dt_1 + \left(\frac{5}{4} x_1 + 1 - x_3 a_{24}(x) \right) dt_2, \\ dx_4 &= -x_4 a_{14}(x) dt_1 + (x_4 - x_4 a_{24}(x)) dt_2, \end{aligned} \tag{17}$$

где функции $a_{14}: x \rightarrow -x_2 - 2x_3 + 1$, $a_{24}: x \rightarrow -2x_2 - 4x_3$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$.

На основании собственных чисел

$$\lambda_1^1 = i, \lambda_2^1 = -i, \lambda_3^1 = 1 + i, \lambda_4^1 = 1 - i, \lambda_5^1 = 0$$

и

$$\lambda_1^2 = 1 + 2i, \lambda_2^2 = 1 - 2i, \lambda_3^2 = 2i, \lambda_4^2 = -2i, \lambda_5^2 = 1$$

и общих собственных векторов

$$\nu^1 = (1 + 2i, 2, 0, 0, 0), \nu^2 = (1 - 2i, 2, 0, 0, 0), \nu^3 = (0, i, 2i, 0, 1),$$

$$\nu^4 = (0, -i, -2i, 0, 1) \quad \text{и} \quad \nu^5 = (0, 0, 0, 1, 0)$$

строим (теоремы 2 и 3) базис автономных первых интегралов на областях \mathcal{X} из множества $\{x: x_4 \neq 0, x_1 + 2x_2 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^4 :

$$W_1: x \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{2x_1}{x_1 + 2x_2} - \operatorname{arctg}(x_2 + 2x_3), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (18)$$

$$W_2: x \rightarrow \frac{(x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1)^2}{x_4^2}, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (19)$$

2.3. Случай кратных интегральных характеристических корней

Из системы (1.1) произвольным образом выделим обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt_\zeta} = J_{i\zeta}(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1. \zeta)$$

обладающую свойством: у матрицы A_ζ число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

При этом характеристическим уравнением дифференциальной системы (1. ζ) является ζ -е уравнение интегральной характеристической системы (8.1), которое будем обозначать (8. ζ).

Определение 1. Пусть λ_l^ζ — собственное число матрицы A_ζ , которому соответствует элементарный делитель кратности s и собственный вектор $\nu^{0l} = (\nu_1^{0l}, \dots, \nu_{n+1}^{0l})$. Вектор $\nu^{kl} = (\nu_1^{kl}, \dots, \nu_{n+1}^{kl})$, координатами которого являются решения системы уравнений

$$(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E) \operatorname{colon}(\nu_1^{kl}, \dots, \nu_{n+1}^{kl}) = k \cdot \operatorname{colon}(\nu_1^{k-1, l}, \dots, \nu_{n+1}^{k-1, l}),$$

$$k = \overline{1, s-1}, \quad (20)$$

назовём **k -м присоединённым вектором** матрицы A_ζ , соответствующим собственному числу λ_l^ζ .

Обозначим:

$$\nu^{kl} = (\nu_1^{kl}, \dots, \nu_{n+1}^{kl}), \quad p_{kl}(x) = \sum_{i=1}^n \nu_i^{kl} x_i + \nu_{n+1}^{kl}.$$

Теорема 4. Пусть $\nu^{\theta l}$ и $\nu^{\theta l}$, $\theta = \overline{1, s_l - 1}$, $l = \overline{1, r}$, — общие линейно независимые вещественные собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ , которые соответствуют собственным числам λ_l^ζ , $l = \overline{1, r}$, имеющим элементарные делители кратности s_l при $\sum_{l=1}^r s_l \geq m + 2$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы (1.1) будет функция

$$W: x \rightarrow \prod_{\xi=1}^k |p_{0\xi}(x)|^{h_{0\xi}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} v_{q\xi}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (21)$$

где \mathcal{X} есть область из множества определения DW, функции $v_{q\xi}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $q = \overline{1, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, таковы, что на \mathcal{X}

$$p_{i\xi}(x) = \sum_{q=1}^i \binom{i-1}{q-1} v_{q\xi}(x) p_{i-q, \xi}(x), \quad i = \overline{1, \varepsilon_\xi}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad (22)$$

и $\sum_{\tau=1}^k (\varepsilon_\tau + 1) = m + 2$, $\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k}$, $k \leq r$. При этом

$$\mathbf{p}_j v_{q\xi}(x) \equiv \mu_{q\xi}^j, \quad \mu_{q\xi}^j = \text{const}, \quad q = \overline{1, \varepsilon_\xi}, \quad \xi = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m},$$

а числа $h_{q\xi}$, $q = \overline{0, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, составляют нетривиальное решение системы

$$\sum_{\xi=1}^k h_{0\xi} = 0, \quad \sum_{\xi=1}^k \left(\lambda_\xi^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (23)$$

где λ_ξ^j , $\xi = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$, — вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$.

Доказательство. На основании соотношений (20) и леммы 1.1 устанавливаем, что на \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\zeta p_{\theta l}(x) &= p_{\theta l}(x) (-a_{\zeta, n+1}(x) + \lambda_l^\zeta) + \theta \cdot p_{\theta-1, l}(x), \\ \theta &= \overline{0, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (24)$$

Систему (22) всегда можно разрешить относительно $v_{q\xi}$, так как при фиксированном ξ её определитель равен $p_{0\xi}^{\varepsilon\xi}(x)$ и отличен от тождественного нуля на области \mathcal{X} .

Докажем, что для функций v_{ql} на области \mathcal{X} справедливы тождества

$$\mathbf{p}_\zeta v_{ql}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } q = 1, \\ 0 & \text{при } q = \overline{2, s_l - 1}, \quad l = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (25)$$

Соотношения (25) при $q = 1$ и $q = 2$ непосредственно проверяются на основании тождеств (24).

Доказательство для случаев $q \geq 3$ проведём методом математической индукции.

Предположим, что система тождеств (25) выполняется при $q = \overline{3, \varepsilon - 1}$.

Вычислим производную Ли в силу системы (1. ζ) от функции $p_{\varepsilon l}$ с учётом соотношений (22), (24) и (25) при $q = \overline{1, \varepsilon - 1}$ на области \mathcal{X} :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\zeta p_{\varepsilon l}(x) &= (-a_{\zeta, n+1}(x) + \lambda_l^\zeta) \sum_{q=1}^{\varepsilon} \binom{\varepsilon-1}{q-1} v_{ql}(x) p_{\varepsilon-q, l}(x) + \\ &+ (\varepsilon - 1) \sum_{q=1}^{\varepsilon-1} \binom{\varepsilon-2}{q-1} v_{ql}(x) p_{\varepsilon-q-1, l}(x) + p_{\varepsilon-1, l}(x) + p_{0l}(x) \mathbf{p}_\zeta v_{\varepsilon l}(x). \end{aligned}$$

Отсюда в силу соотношений (22) при $i = \varepsilon - 1$ и $i = \varepsilon$, системы тождеств (24) при $\theta = \varepsilon$ и того, что $p_{0l}(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, получаем:

$$\mathbf{p}_\zeta v_{\varepsilon l}(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Пусть

$$v_{0l} : x \rightarrow \ln|p_{0l}(x)|, \forall x \in \mathcal{X}, l = \overline{1, r}. \quad (26)$$

Тогда из соотношений (24) и (25) получаем, что

$$\mathbf{p}_\zeta v_{0l}(x) = -a_{\zeta, n+1}(x) + \lambda_l^\zeta, \forall x \in \mathcal{X}, l = \overline{1, r}, \quad (27)$$

$$\mathbf{p}_\zeta v_{1l}(x) = 1, \forall x \in \mathcal{X}, l = \overline{1, r}, \quad (28)$$

$$\mathbf{p}_\zeta v_{ql}(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}, q = \overline{2, s_l - 1}, l = \overline{1, r}. \quad (29)$$

По условию теоремы, матрицы $A_j, j = \overline{1, m}$, имеют r общих собственных векторов $\nu^{0l}, l = \overline{1, r}$, и выполняются соотношения

$$\mathbf{p}_j v_{0l}(x) = -a_{j, n+1}(x) + \lambda_l^j, \forall x \in \mathcal{X}, l = \overline{1, r}, j = \overline{1, m}, \quad (30)$$

Учитывая, что линейные дифференциальные операторы первого порядка $\mathbf{p}_j, j = \overline{1, m}$, перестановочны, из соотношений (28) и (29) получаем, что на области \mathcal{X}

$$\mathbf{p}_j v_{ql}(x) = \mu_{ql}^j, q = \overline{1, s_l - 1}, l = \overline{1, r}, j = \overline{1, m}, j \neq \zeta. \quad (31)$$

Следовательно, существуют $\sum_{l=1}^r s_l$ функций

$$v_{ql} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, q = \overline{0, s_l - 1}, l = \overline{1, r},$$

заданных соотношениями (22) и (26), относительно которых выполняются условия (25), (27) – (31) и которые функционально независимы, учитывая способ их построения.

Построим функцию

$$W^*: x \rightarrow \sum_{\xi=1}^k \sum_{q=0}^{\varepsilon_{\xi}} h_{q\xi} v_{q\xi}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,$$

и вычислим действие на неё операторов на области \mathcal{X} :

$$\mathbf{p}_j^* W(x) = \sum_{\xi=1}^k \left(-a_{j,n+1}(x) h_{0\xi} + \lambda_{\xi}^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\xi}} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right), \quad j = \overline{1, m}.$$

Если числа $h_{q\xi}$, $q = \overline{0, \varepsilon_{\xi}}$, $\xi = \overline{1, k}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы (23), то функция W^* будет первым интегралом на области \mathcal{X} вполне разрешимой дифференциальной системы (1.1).

Полагая

$$W(x) = \exp W^*(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

получим первый интеграл вида (21) системы (1.1). ■

Пример 4. Для вполне разрешимой системы

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_2 - x_1(-x_1 + 2x_3 + 2))dt_1 + (2x_1 - x_3 - x_1(x_2 - 3x_3 + 1))dt_2, \\ dx_2 &= (2x_2 - x_3 - 1 - x_2(-x_1 + 2x_3 + 2))dt_1 + \\ &\quad + (-x_1 + 2x_2 + 1 - x_2(x_2 - 3x_3 + 1))dt_2, \\ dx_3 &= (x_1 - 1 - x_3(-x_1 + 2x_3 + 2))dt_1 + (-x_1 + 3x_3 + 1 - x_3(x_2 - 3x_3 + 1))dt_2 \end{aligned} \quad (32)$$

по собственному числу $\lambda_1^1 = 1$ с четырёхкратным элементарным делителем $(\lambda^1 - 1)^4$, собственному вектору $\nu^0 = (-1, 1, -1, 0)$ и присоединённым векторам $\nu^1 = (1, 0, -1, -1)$, $\nu^2 = (1, -1, 3, 0)$, $\nu^3 = (-3, 0, 9, 9)$ строим на областях \mathcal{X} из множества $V = \{x: -x_1 + x_2 - x_3 \neq 0\}$ скалярные функции

$$v_1: x \rightarrow \frac{x_1 - x_3 - 1}{-x_1 + x_2 - x_3},$$

$$v_2: x \rightarrow \frac{(x_1 - x_2 + 3x_3)(-x_1 + x_2 - x_3) - (x_1 - x_3 - 1)^2}{(-x_1 + x_2 - x_3)^2},$$

$$v_3: x \rightarrow \frac{1}{(-x_1 + x_2 - x_3)^3} ((-3x_1 + 9x_3 + 9)(-x_1 + x_2 - x_3)^2 - 3(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_3 - 1)(x_1 - x_2 + 3x_3) + 2(x_1 - x_3 - 1)^3).$$

По теореме 4 на областях \mathcal{X} , $\mathcal{X} \subset V$, функция

$$W: x \rightarrow \frac{(x_1 - x_2 + 3x_3)(-x_1 + x_2 - x_3) - (x_1 - x_3 - 1)^2}{(-x_1 + x_2 - x_3)^2} \quad (33)$$

образует автономный интегральный базис системы (32).

Дополнительно обозначим:

$$p_{q\xi}^*(x) = \sum_{i=1}^n \nu_i^{*q\xi} x_i + \nu_{n+1}^{*q\xi}, \quad \tilde{p}_{q\xi}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{\nu}_i^{q\xi} x_i + \tilde{\nu}_{n+1}^{q\xi},$$

$$P_{0\xi}(x) = (p_{0\xi}^*(x))^2 + (\tilde{p}_{0\xi}(x))^2, \quad \varphi_{0\xi}(x) = \arctg \frac{\tilde{p}_{0\xi}(x)}{p_{0\xi}^*(x)}.$$

Доказательство теоремы 4 предусматривает также случай, когда матрицы A_j , $j = \overline{1, m}$, имеют некоторое число общих комплексных собственных векторов ν^{0l} (при этом в соотношениях (21) и (26) достаточно опустить знак модуля для комплекснозначных функций p_{0l}), соответствующих собственным числам λ_l^ζ с элементарными делителями кратности s_l .

В этом случае на основании определённой группировки $m + 2$ функций v_{ql} , $q = \overline{0, \varepsilon_l - 1}$, $l = \overline{1, r}$, всегда получим одну из двух возможностей.

1. В наборе из $m + 2$ функций наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента содержится и комплексно сопряжённая ей.

2. В наборе из $m + 2$ функций имеется одна комплекснозначная функция вещественного аргумента, не имеющая комплексно сопряжённой.

В каждом из этих случаев вполне разрешимая система Якоби (1.1) будет иметь следующие первые интегралы.

В первом случае это — функция

$$W: x \rightarrow \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{h_{0\xi}} \exp \left(-2\tilde{h}_{0\xi} \varphi_{0\xi}(x) + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2(h_{q\xi}^* v_{q\xi}^*(x) - \tilde{h}_{q\xi} \tilde{v}_{q\xi}(x)) \right) \prod_{\theta=1}^{k_2} |p_{0\theta}(x)|^{h_{0\theta}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} h_{q\theta} v_{q\theta}(x)$$

на области \mathcal{X} из множества определения DW , где вещественные числа $h_{q\xi}^*, \tilde{h}_{q\xi}, h_{q\theta}, q = \overline{0, \varepsilon_k}, k = \xi$ или $k = \theta, \xi = \overline{1, k_1}, \theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной системы

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\xi=1}^{k_1} h_{0\xi}^* + \sum_{\theta=1}^{k_2} h_{0\theta} &= 0, \\ \sum_{\xi=1}^{k_1} \left(2(h_{\xi}^{*j} h_{0\xi}^* - \tilde{\lambda}_{\xi}^j \tilde{h}_{0\xi}) + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2(\mu_{q\xi}^{*j} h_{q\xi}^* - \tilde{\mu}_{q\xi}^j \tilde{h}_{q\xi}) \right) + \\ + \sum_{\theta=1}^{k_2} \left(\lambda_{\theta}^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta} \right) &= 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

а $\lambda_{\xi}^j = \lambda_{\xi}^{*j} + \tilde{\lambda}_{\xi}^j i, \xi = \overline{1, k_1}$, и $\lambda_{\theta}^j, \theta = \overline{1, k_2}, j = \overline{1, m}$, есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j, j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi} (\nu_{\tau}^{0\xi} = \nu_{\tau}^{*0\xi} + \tilde{\nu}_{\tau}^{0\xi} i, \tau = \overline{1, n+1}, \xi = \overline{1, k_1})$ и $\nu^{0\theta}, \theta = \overline{1, k_2}$. Числа

$$\mu_{q\xi}^{*j} = \operatorname{Re} \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \tilde{\mu}_{q\xi}^j = \operatorname{Im} \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q\theta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\theta}(x), \quad j = \overline{1, m},$$

при любых $x \in \mathcal{X}$, функции

$$v_{q\xi} : x \rightarrow v_{q\xi}^*(x) + \widetilde{v}_{q\xi}(x)i, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \text{и} \quad v_{q\theta} : x \rightarrow v_{q\theta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2},$$

находятся из системы (22), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} (\varepsilon_\xi + 1) + \sum_{\theta=1}^{k_2} (\varepsilon_\theta + 1) = m + 2 \quad \text{при} \quad 2k_1 + k_2 \leq r,$$

$\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, где k_1 — число пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов матриц A_j ; $\varepsilon_\theta \leq s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, а k_2 — число вещественных общих собственных векторов матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пример 5. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 + 2 - x_1 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (-4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 - x_1 a_{26}(x)) dt_2, \\ dx_2 &= (-x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_5 - 3 - x_2 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (x_1 + 3x_2 + x_5 - 1 - x_2 a_{26}(x)) dt_2, \\ dx_3 &= (-3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 - 2x_5 - 4 - x_3 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (6x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 1 - x_3 a_{26}(x)) dt_2, \\ dx_4 &= (3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 + 5 - x_4 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 2 - x_4 a_{26}(x)) dt_2, \\ dx_5 &= (5x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 6 - x_5 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 2 - x_5 a_{26}(x)) dt_2, \end{aligned} \tag{34}$$

где линейные функции

$$a_{16}: x \rightarrow -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 - 2, \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

$$a_{26}: x \rightarrow -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 2, \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

является вполне разрешимой.

Собственному числу $\lambda_1^1 = 1 + 2i$ соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1 - 2i)^3$ кратности три, а также собственный вектор $\nu^0 = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$, первый $\nu^1 = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$ и второй $\nu^2 = (2 + 2i, 0, 2 + 2i, 0, 2i, 2i)$ присоединённые векторы.

По ним составляем функции

$$v_1: x \rightarrow \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \forall x \in \mathcal{X}, \quad \text{и} \quad v_2: x \rightarrow \frac{p_0(x)p_2(x) - (p_1(x))^2}{(p_0(x))^2}, \forall x \in \mathcal{X},$$

где линейные неоднородные функции

$$p_0: x \rightarrow x_1 + (1 + i)x_3 + x_4 + ix_5 + 1, \quad p_1: x \rightarrow x_1 + (1 + i)x_2 + ix_5 + i,$$

$$p_2: x \rightarrow (2 + 2i)x_1 + (2 + 2i)x_3 + 2ix_5 + 2i, \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

а \mathcal{X} — произвольная область из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^5 .

Выделяя вещественные и мнимые части функций v_1 и v_2 , на области \mathcal{X} соответственно получаем:

$$v_1^*: x \rightarrow ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + 1) + (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + 1))P^{-1}(x),$$

$$\tilde{v}_1: x \rightarrow ((x_1 + x_3 + x_4 + 1)(x_2 + x_5 + 1) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_5))P^{-1}(x)$$

и

$$\begin{aligned} v_2^*: x \rightarrow & (((x_1 + x_3 + x_4 + 1)(x_2 + x_5 + 1) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_5))^2 + \\ & + 2P(x)((x_1 + x_3)(x_1 + x_3 + x_4 + 1) + (x_3 + x_5)(x_1 + x_3 + x_5 + 1)) - \\ & - ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + 1) + (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + 1))^2)P^{-2}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2: x \rightarrow & 2(P(x)((x_1 + x_3 + x_4 + 1)(x_1 + x_3 + x_5 + 1) - \\ & - (x_1 + x_3)(x_3 + x_5)) + ((x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + 1) + (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + 1)) \cdot \\ & \cdot ((x_3 + x_5)(x_1 + x_2) - (x_1 + x_3 + x_4 + 1)(x_2 + x_5 + 1)))P^{-2}(x), \end{aligned}$$

где полином $P: x \rightarrow (x_1 + x_3 + x_4 + 1)^2 + (x_3 + x_5)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^5$.

Тогда скалярные функции (случай 1)

$$W_1: x \rightarrow -2 \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + 1} + 4^*v_1(x) + 2\tilde{v}_1(x), \quad (35)$$

$$W_2: x \rightarrow v_2^*(x), \quad (36)$$

$$W_3: x \rightarrow 4\tilde{v}_1(x) + 2v_2^*(x) - 2\tilde{v}_2(x), \quad (37)$$

будучи функционально независимыми, образуют автономный интегральный базис системы (34) на областях \mathcal{X} , $\mathcal{X} \subset \{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$.

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай а. Общий собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, не имеет комплексно сопряжённого.

Тогда система (1.1) имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} W_1: x \rightarrow & \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{h_{0,2\xi-1}^* + h_{0,2\xi}^*} \exp\left(-2(\tilde{h}_{0,2\xi-1} - \tilde{h}_{0,2\xi})\varphi_{0\xi}(x) + \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left((h_{q,2\xi-1}^* + h_{q,2\xi}^*)v_{q\xi}^*(x) + (\tilde{h}_{q,2\xi} - \tilde{h}_{q,2\xi-1})\tilde{v}_{q\xi}(x)\right)\right) \cdot \\ & \cdot (P_{0,2k_1+1}(x))^{h_{0,2k_1+1}^*} \exp\left(-2\tilde{h}_{0,2k_1+1}\varphi_{0,2k_1+1}(x)\right) \cdot \\ & \cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} (p_{0\theta}(x))^{2h_{0\theta}^*} \exp\left(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} h_{q\theta}^* v_{q\theta}(x)\right), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2: x \rightarrow & \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{\tilde{h}_{0,2\xi-1} + \tilde{h}_{0,2\xi}} \exp \left(2(\overset{*}{h}_{0,2\xi-1} - \overset{*}{h}_{0,2\xi}) \varphi_{0\xi}(x) + \right. \\
& + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2 \left((\tilde{h}_{q,2\xi-1} + \tilde{h}_{q,2\xi}) \overset{*}{v}_{q\xi}(x) + (\overset{*}{h}_{q,2\xi-1} - \overset{*}{h}_{q,2\xi}) \tilde{v}_{q\xi}(x) \right) \Big) \cdot \\
& \cdot (P_{0,2k_1+1}(x))^{\tilde{h}_{0,2k_1+1}} \exp \left(2 \overset{*}{h}_{0,2k_1+1} \varphi_{0,2k_1+1}(x) \right) \cdot \\
& \cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} (p_{0\theta}(x))^{2\tilde{h}_{0\theta}} \exp \left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \tilde{h}_{q\theta} \overset{*}{v}_{q\theta}(x) \right), \quad \forall x \in \mathcal{X},
\end{aligned}$$

где \mathcal{X} есть область из множества $DW_1 \cap DW_2$, комплексные числа $h_{q\xi} = \overset{*}{h}_{q\xi} + \tilde{h}_{\xi q} i$, $h_{q\theta} = \overset{*}{h}_{q\theta} + \tilde{h}_{q\theta} i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, 2k_1+1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной системы

$$\begin{aligned}
& \sum_{\xi=1}^{2k_1} h_{0\xi} + h_{0,2k_1+1} + \sum_{\theta=1}^{k_2} h_{0\theta} = 0, \\
& \sum_{\xi=1}^{2k_1} \left(\lambda_\xi^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right) + \lambda_{2k_1+1}^j h_{0,2k_1+1} + \\
& + \sum_{\theta=1}^{k_2} \left(\lambda_\theta^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta} \right) = 0, \quad j = \overline{1, m},
\end{aligned}$$

числа $\lambda_{2\xi-1}^j = \overset{*}{\lambda}_\xi^j + \tilde{\lambda}_\xi^j i$, $\lambda_{2\xi}^j = \overset{*}{\lambda}_\xi^j - \tilde{\lambda}_\xi^j i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\lambda_{2k_1+1}^j = \overset{*}{\lambda}_{2k_1+1}^j + \tilde{\lambda}_{2k_1+1}^j i$ и λ_θ^j , $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$, — соответственно

существенно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, с собственными векторами $\nu^{0, 2\xi-1}$, $\nu^{0, 2\xi}$ ($\nu_\tau^{0, 2\xi-1} = \nu_\tau^{*0\xi} + \tilde{\nu}_\tau^{0\xi} i$, $\nu_\tau^{0, 2\xi} = \overline{\nu_\tau^{0, 2\xi-1}}$, $\tau = \overline{1, n+1}$, $\xi = \overline{1, k_1}$), $\nu^{0, 2k_1+1}$ ($\nu_\tau^{0, 2k_1+1} = \nu_\tau^{*0, 2k_1+1} + \tilde{\nu}_\tau^{0, 2k_1+1} i$, $\tau = \overline{1, n+1}$) и $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$. Числа

$$\mu_{q, 2\xi-1}^j = \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q, 2\xi}^j = \overline{\mathbf{p}_j v_{q\xi}(x)}, \quad \mu_{q\theta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\theta}(x), \quad j = \overline{1, m},$$

при любых $x \in \mathcal{X}$, функции

$$v_{q\xi}: x \rightarrow v_{q\xi}^*(x) + \tilde{v}_{q\xi}(x) i, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \text{и} \quad v_{q\theta}: x \rightarrow v_{q\theta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2},$$

находятся из системы (22), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} (\varepsilon_\xi + 1) + 1 + \sum_{\theta=1}^{k_2} (\varepsilon_\theta + 1) = m + 2 \quad \text{при} \quad 2k_1 + 1 + k_2 \leq r,$$

$\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, где k_1 — число пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов матриц A_j ; $\varepsilon_\theta \leq s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, а k_2 — число вещественных общих собственных векторов матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пример 6. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 + 1 - x_1 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &+ (2x_2 + x_5 + 1 - x_1 a_{26}(x)) dt_2 + (3x_1 - x_5 - 1 - x_1 a_{36}(x)) dt_3, \\ dx_2 &= (2x_2 - 2x_3 - 2x_5 - 2 - x_2 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &+ (-x_1 - 3x_2 - x_5 - 1 - x_2 a_{26}(x)) dt_2 + (-x_1 + 2x_2 + x_5 + 1 - x_2 a_{36}(x)) dt_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx_3 &= (3x_2 - 2x_3 - 2x_5 - 2 - x_3 a_{16}(x)) dt_1 + \\
&\quad + (-x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_5 - 2 - x_3 a_{26}(x)) dt_2 + \\
&\quad + (-2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 + 1 - x_3 a_{36}(x)) dt_3, \\
dx_4 &= (-4x_2 + 2x_4 - 2x_5 + 2 - x_4 a_{16}(x)) dt_1 + \\
&\quad + (2x_1 + 2x_2 + x_4 + 4 - x_4 a_{26}(x)) dt_2 + \\
&\quad + (x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 1 - x_4 a_{36}(x)) dt_3, \\
dx_5 &= (2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4 - x_5 a_{16}(x)) dt_1 + \\
&\quad + (3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 4 - x_5 a_{26}(x)) dt_2 + \\
&\quad + (2x_1 + x_2 - x_3 - 1 - x_5 a_{36}(x)) dt_3,
\end{aligned} \tag{38}$$

где функции

$$\begin{aligned}
a_{16}: x &\rightarrow -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5, \\
a_{26}: x &\rightarrow -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 - 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5, \\
a_{36}: x &\rightarrow -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5,
\end{aligned}$$

вполне разрешима.

На основании собственных чисел $\lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 1 + i$, $\lambda_5^1 = 2i$, которым соответствуют элементарные делители $(\lambda^1 - 1 - i)^2$, $\lambda^1 - 2i$, собственных $\nu^{01} = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$, $\nu^{02} = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$ и первого присоединённого $\nu^{11} = (1 + i, 0, 1 + i, 0, i, i)$ векторов на области \mathcal{X} строим функции

$$v_1^*: x \rightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) + (x_2 + x_5 + 1)(x_1 + x_3 + x_5 + 1)}{P_1(x)}$$

и

$$\tilde{v}_1: x \rightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_5 + 1) - (x_1 + x_3)(x_2 + x_5 + 1)}{P_1(x)},$$

где $P_1: x \rightarrow (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_5 + 1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^5$.

Тогда функции (случай 2а)

$$W_1: x \rightarrow \left(\frac{P_2(x)}{P_1(x)} \right)^2 \exp \left(8 \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_5 + 1}{x_1 + x_2} - 4 v_1(x) \right) \quad (39)$$

и

$$W_2: x \rightarrow -2 \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_5 + 1}{x_1 + x_2} + \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + 1} - 2 \tilde{v}_1(x), \quad (40)$$

где полином $P_2: x \rightarrow (x_1 + x_3 + x_4 + 1)^2 + (x_3 + x_5)^2, \forall x \in \mathbb{R}^5$, образуют автономный интегральный базис системы (38) на областях \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^5 .

Случай б. Функция $v_{l\gamma}, \gamma \in \{1, \dots, k_1\}, l \in \{1, \dots, \varepsilon_\gamma\}$, не имеет комплексно сопряжённой функции.

Тогда вполне разрешимая дифференциальная система (1.1) имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} W_1: x \rightarrow & \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_{0\xi}(x))^{*h_{0,2\xi-1} + *h_{0,2\xi}} \exp \left(-2(\tilde{h}_{0,2\xi-1} - \tilde{h}_{0,2\xi}) \varphi_{0\xi}(x) + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2(1 - \delta_{ql} \delta_{\xi\gamma}) \left((*h_{q,2\xi-1} + *h_{q,2\xi}) v_{q\xi}^*(x) + \right. \\ & \left. \left. + (\tilde{h}_{q,2\xi} - \tilde{h}_{q,2\xi-1}) \tilde{v}_{q\xi}(x) \right) \right) \cdot \exp \left(2(*h_{l\gamma} v_{l\gamma}^*(x) - \tilde{h}_{l\gamma} \tilde{v}_{l\gamma}(x)) \right) \cdot \\ & \cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} (p_{0\theta}(x))^{2h_{0\theta}} \exp \left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} *h_{q\theta} v_{q\theta}(x) \right), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

$$W_2: x \rightarrow \prod_{\xi=1}^{k_1} (P_\xi(x))^{\tilde{h}_{0,2\xi-1} + \tilde{h}_{0,2\xi}} \exp \left(2(*h_{0,2\xi-1} - *h_{0,2\xi}) \varphi_{0\xi}(x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\xi}} 2(1 - \delta_{ql} \delta_{\xi\gamma}) \left((\tilde{h}_{q,2\xi-1} + \tilde{h}_{q,2\xi})^* v_{q\xi}(x) + \right. \\
& \left. + (h_{q,2\xi-1}^* - h_{q,2\xi}^*) \tilde{v}_{q\xi}(x) \right) \cdot \exp \left(2(h_{l\gamma}^* \tilde{v}_{l\gamma}(x) + \tilde{h}_{l\gamma}^* v_l^*(x)) \right) \cdot \\
& \cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} (p_{0\theta}(x))^{2\tilde{h}_{0\theta}} \exp \left(2 \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\theta}} \tilde{h}_{q\theta} v_{q\theta}(x) \right), \forall x \in \mathcal{X},
\end{aligned}$$

где \mathcal{X} — область из множества $DW_1 \cap DW_2$, комплексные числа $h_{q\xi} = h_{q\xi}^* + \tilde{h}_{q\xi} i$, $h_{q\theta} = h_{q\theta}^* + \tilde{h}_{q\theta} i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, 2k_1}$, $\xi \neq \gamma + 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной системы

$$\begin{aligned}
& \sum_{\xi=1}^{2k_1} h_{0\xi} + \sum_{\theta=1}^{k_2} h_{0\theta} = 0, \\
& \sum_{\xi=1}^{2k_1} \left(\lambda_{\xi}^j h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\xi}} \mu_{q\xi}^j h_{q\xi} \right) - \mu_{l,\gamma+1}^j h_{l,\gamma+1} + \\
& + \sum_{\theta=1}^{k_2} \left(\lambda_{\theta}^j h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_{\theta}} \mu_{q\theta}^j h_{q\theta} \right) = 0, j = \overline{1, m},
\end{aligned}$$

числа $\lambda_{2\xi-1}^j = \lambda_{\xi}^j + \tilde{\lambda}_{\xi}^j i$, $\lambda_{2\xi}^j = \lambda_{\xi}^j - \tilde{\lambda}_{\xi}^j i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $j = \overline{1, m}$, и λ_{θ}^j , $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$, — соответственно существенно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, с собственными векторами $\nu^{0,2\xi-1}$, $\nu^{0,2\xi}$ ($\nu_{\tau}^{0,2\xi-1} = \tilde{\nu}_{\tau}^{*0\xi} + \tilde{\nu}_{\tau}^{0\xi} i$, $\nu_{\tau}^{0,2\xi} = \overline{\nu_{\tau}^{0,2\xi-1}}$, $\tau = \overline{1, n+1}$, $\xi = \overline{1, k_1}$) и $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$. Числа

$$\mu_{q,2\xi-1}^j = \mathbf{p}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q,2\xi}^j = \overline{\mathbf{p}_j v_{q\xi}(x)}, \quad \mu_{q\theta}^j = \mathbf{p}_j v_{q\theta}(x), \quad j = \overline{1, m},$$

при любых $x \in \mathcal{X}$, функции

$$v_{q\xi}: x \rightarrow \overset{*}{v}_{q\xi}(x) + \widetilde{v}_{q\xi}(x)i, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \text{и} \quad v_{q\theta}: x \rightarrow v_{q\theta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$q = \overline{1, \varepsilon_k}, \quad k = \xi \quad \text{или} \quad k = \theta, \quad \xi = \overline{1, k_1}, \quad \theta = \overline{1, k_2},$$

находятся из системы (22), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} (\varepsilon_\xi + 1) - 1 + \sum_{\theta=1}^{k_2} (\varepsilon_\theta + 1) = m + 2 \quad \text{при} \quad 2k_1 + k_2 \leq r,$$

$\varepsilon_\xi \leq s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, где k_1 — число пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов матриц A_j ; $\varepsilon_\theta \leq s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, а k_2 — число вещественных общих собственных векторов матриц A_j , $j = \overline{1, m}$.

Пример 7. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 + 2 - x_1 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (-4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 - x_1 a_{26}(x)) dt_2 + \\ &\quad + (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 2 - x_1 a_{36}(x)) dt_3, \\ dx_2 &= (-x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_5 - 3 - x_2 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (x_1 + 3x_2 + x_5 - 1 - x_2 a_{26}(x)) dt_2 + \\ &\quad + (2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 + 2 - x_2 a_{36}(x)) dt_3, \\ dx_3 &= (-3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 - 2x_5 - 4 - x_3 a_{16}(x)) dt_1 + \\ &\quad + (6x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 1 - x_3 a_{26}(x)) dt_2 + \\ &\quad + (3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2 - x_3 a_{36}(x)) dt_3, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
dx_4 = & (3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 + 5 - x_4 a_{16}(x)) dt_1 + \\
& + (2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 2 - x_4 a_{26}(x)) dt_2 + \\
& + (-3x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 - x_5 - 1 - x_4 a_{36}(x)) dt_3, \\
dx_5 = & (5x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 6 - x_5 a_{16}(x)) dt_1 + \\
& + (x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 2 - x_5 a_{26}(x)) dt_2 + \\
& + (-3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 - x_5 - 2 - x_5 a_{36}(x)) dt_3,
\end{aligned}$$

где

$$a_{16}: x \rightarrow -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 - 2, \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

$$a_{26}: x \rightarrow -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 2, \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

$$a_{36}: x \rightarrow 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5, \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

является вполне разрешимой.

На основании собственного числа $\lambda_1^1 = 1 + 2i$, которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1 - 2i)^3$ кратности три, а также собственный $\nu^0 = (1, 0, 1 + i, 1, i, 1)$, первый $\nu^1 = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$ и второй $\nu^2 = (2 + 2i, 0, 2 + 2i, 0, 2i, 2i)$ присоединённые векторы, строим функции (случай 2б)

$$W_1: x \rightarrow 2 \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + 1} - 4^* v_1(x) - 2 \tilde{v}_1(x) + {}^* v_2(x) \quad (42)$$

и

$$W_2: x \rightarrow -4 \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + 1} + 8^* v_1(x) + 2 \tilde{v}_1(x) + \tilde{v}_2(x) \quad (43)$$

на любой области \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$, где функции ${}^* v_1, \tilde{v}_1, {}^* v_2, \tilde{v}_2$ такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен интегральный базис дифференциальной системы (34).

Функции (42) и (43), будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов системы (41) на областях \mathcal{X} из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^5 .

3. Неавтономные первые интегралы

Построение неавтономных первых интегралов на основании автономных первых интегралов.

Система (1.1) индуцирует линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{P}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \mathfrak{p}_j(x), \quad \forall(t, x) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad j = \overline{1, m},$$

Для построения базиса неавтономных первых интегралов системы (1.1) (размерности n) достаточно к базису автономных первых интегралов (размерности $n - m$) этой системы добавить m функционально независимых на некоторой области \mathcal{D} из пространства \mathbb{R}^{n+m} неавтономных первых интегралов.

Такая процедура всякий раз может быть осуществлена на основании следующих закономерностей.

Теорема 1. Пусть ν^1 и ν^2 — общие вещественные линейно независимые собственные векторы матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которые соответствуют различным собственным числам λ_1^j и λ_2^j этих матриц. Тогда первым интегралом на области \mathcal{D} вполне разрешимой системы (1.1) будет функция

$$W: (t, x) \rightarrow \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \exp\left(\sum_{j=1}^m (\lambda_2^j - \lambda_1^j) t_j\right), \quad \forall(t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

Действительно, с учётом леммы 1.1 производные Ли в силу системы (1.1) функции (1) на области \mathcal{D}

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_j W(t, x) &= \partial_{t_j} W(t, x) + \mathfrak{p}_j W(t, x) = \\ &= (\lambda_2^j - \lambda_1^j + \lambda_1^j - \lambda_2^j) W(t, x) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 1 (продолжение примера 1.2). На основании собственных векторов

$$\nu^1 = (1, 1, 0, 1), \quad \nu^3 = (1, 2, 1, 1); \quad \nu^1 = (1, 1, 0, 1), \quad \nu^4 = (1, 1, 1, 0)$$

и соответствующих им собственных чисел

$$\lambda_1^1 = -2, \lambda_3^1 = 1, \lambda_1^2 = -3, \lambda_3^2 = 2;$$

$$\lambda_1^1 = -2, \lambda_4^1 = 2, \lambda_1^2 = -3, \lambda_4^2 = 3$$

по теореме 1 строим первые интегралы

$$W_1: (t, x) \rightarrow \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 + 2x_2 + x_3 + 1} \exp(3t_1 + 5t_2), \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

и

$$W_2: (t, x) \rightarrow \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 + x_2 + x_3} \exp(4t_1 + 6t_2), \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

дифференциальной системы (4.2).

Скалярные функции (5.2), W_1 и W_2 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (4.2) на областях \mathcal{D} из множества $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} есть произвольная область из множества

$$\{x: 2x_1 + x_2 + x_3 + 1 \neq 0, x_1 + 2x_2 + x_3 + 1 \neq 0, x_1 + x_2 + x_3 \neq 0\}.$$

Следствие 1. Пусть $\nu^1 (\nu_\tau^1 = \nu_\tau^{*1} + \tilde{\nu}_\tau^1 i, \tau = \overline{1, n+1})$ суть общий существенно комплексный собственный вектор матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы (1.1) на области \mathcal{D} будет функция

$$W: (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\tilde{p}_1(x)}{p_1^{*1}(x)} - \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}^j t_j, \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \subset DW,$$

где $\lambda^j = \lambda^{*j} + \tilde{\lambda}^j i$ — собственное число матриц $A_j, j = \overline{1, m}$, которому соответствует собственный вектор ν^1 .

Пример 2 (продолжение примера 2.2). На основании собственных векторов

$$\nu^1 = (2, i, 0, 1) \quad \text{и} \quad \nu^2 = (-i, 2, 1, 0)$$

и соответствующих им собственных чисел

$$\lambda_1^1 = 1 + i \quad \text{и} \quad \lambda_1^2 = -1 + 2i$$

по следствию 1 строим первые интегралы системы (13.2):

$$W_1: (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x_2}{2x_1 + 1} - (t_1 + 2t_2), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

и

$$W_2: (t, x) \rightarrow \operatorname{arctg} \frac{-x_1}{2x_2 + x_3} - (t_1 + 2t_2), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}.$$

Скалярные функции (14.2), W_1 и W_2 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (13.2) на областях \mathcal{D} из множества $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} есть произвольная область из множества $\{x: 2x_1 + 1 \neq 0, 2x_2 + x_3 \neq 0\}$.

Следствие 2. Пусть $\nu^1 (\nu_\tau^1 = \tilde{\nu}_\tau^{*1} + \tilde{\nu}_\tau^1 i, \tau = \overline{1, n+1})$ и ν^2 — общие существенно комплексный и вещественный собственные векторы матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом на области \mathcal{D} вполне разрешимой системы (1.1) будет функция

$$W: (t, x) \rightarrow \frac{p_2^2(x)}{P_1(x)} \exp \left(\sum_{j=1}^m 2(\lambda_1^{*j} - \lambda_2^j) t_j \right),$$

где $\mathcal{D} \subset DW$, $\lambda_1^j = \lambda_1^{*j} + \tilde{\lambda}_1^j i$ и λ_2^j — собственные числа матриц $A_j, j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы ν^1 и ν^2 .

Следствие 3. Пусть ν^1 и $\nu^2 (\nu_\tau^k = \tilde{\nu}_\tau^{*k} + \tilde{\nu}_\tau^k i, \tau = \overline{1, n+1}, k = 1, k = 2)$ — общие существенно комплексные (не являющиеся комплексно сопряжёнными) собственные векторы матриц $A_j, j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом на области \mathcal{D} вполне разрешимой системы (1.1) будет функция

$$W: (t, x) \rightarrow \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \exp \left(\sum_{j=1}^m 2(\lambda_2^{*j} - \lambda_1^j) t_j \right),$$

где $\mathcal{D} \subset DW$, $\lambda_k^j = \lambda_k^{*j} + \tilde{\lambda}_k^j i$, $j = \overline{1, m}$, суть собственные числа матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы ν^k , $k = 1, k = 2$.

Пример 3 (продолжение примера 3.2). На основании собственных векторов

$$\nu^3 = (0, i, 2i, 0, 1), \nu^5 = (0, 0, 0, 1, 0) \quad (\text{следствие 2})$$

и

$$\nu^1 = (1 + 2i, 2, 0, 0, 0), \nu^3 = (0, i, 2i, 0, 1) \quad (\text{следствие 3})$$

и соответствующих им собственных чисел

$$\lambda_1^1 = i, \lambda_1^2 = 1 + i, \lambda_3^1 = 1 + i, \lambda_3^2 = 2i, \lambda_5^1 = 0, \lambda_5^2 = 1$$

строим первые интегралы

$$W_3: (t, x) \rightarrow \frac{x_4^2}{1 + (x_2 + 2x_3)^2} \exp(2(t_1 - t_2)), \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

и

$$W_4: (t, x) \rightarrow \frac{(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_1^2}{1 + (x_2 + 2x_3)^2} \exp(2(t_1 - t_2)), \forall (t, x) \in \mathcal{D},$$

дифференциальной системы (17.2).

Скалярные функции (18.2), (19.2), W_3 и W_4 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (17.2) на областях \mathcal{D} из множества $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где \mathcal{X} есть произвольная область из множества $\{x: x_4 \neq 0, x_1 + 2x_2 \neq 0\}$.

Теорема 2. Пусть ν^{01} и $\nu^{\theta 1}$, $\theta = \overline{1, s-1}$, есть общий вещественный собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ , которые соответствуют собственному числу λ_1^ζ , имеющему элементарный делитель кратности $s \geq 2$. Тогда первыми интегралами на области \mathcal{D} вполне разрешимой системы Якоби (1.1) будут функции

$$W_q: (t, x) \rightarrow v_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^m \mu_{q\zeta}^j t_j, \quad q = \overline{1, s-1}, \quad (2)$$

где функции $v_{q\zeta} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ находятся из системы (22.2), числа

$$\mu_{q\zeta}^j = \mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad q = \overline{1, s-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Производные Ли функций (2) в силу дифференциальной системы (1.1)

$$\mathfrak{P}_j W_q(t, x) = \partial_{t_j} W_q(t, x) + \mathfrak{p}_j W_q(t, x) = -\mu_{q\zeta}^j + \mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x),$$

$$\forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, s-1}.$$

Поскольку

$$\mathfrak{p}_j v_{q\zeta}(x) = \mu_{q\zeta}^j, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, s-1},$$

то функции (2) являются первыми интегралами на области \mathcal{D} пространства \mathbb{R}^{n+m} вполне разрешимой системы (1.1). ■

Пример 4 (продолжение примера 4.2). По теореме 2, учитывая, что

$$\mathfrak{p}_1 v_1(x) = 1, \quad \mathfrak{p}_1 v_3(x) = 0, \quad \mathfrak{p}_2 v_1(x) = -1, \quad \mathfrak{p}_2 v_3(x) = 6, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

строим первые интегралы системы (32.2):

$$W_1 : (t, x) \rightarrow v_1(x) - t_1 + t_2, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

$$W_3 : (t, x) \rightarrow v_3(x) - 6t_2, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где функции v_1 и v_3 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис системы (32.2), а \mathcal{X} — любая область из множества $\{x : -x_1 + x_2 - x_3 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^3 .

Скалярные функции (33.2), W_1 и W_3 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (32.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Следствие 4. Пусть ν^{01} и $\nu^{\theta 1}$, $\theta = \overline{1, s-1}$, — общий комплексный собственный вектор матриц A_j , $j = \overline{1, m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ , которые соответствуют существенно комплексному собственному числу λ_1^ζ ,

имеющему элементарный делитель кратности $s \geq 2$. Тогда первыми интегралами на области \mathcal{D} вполне разрешимой системы (1.1) будут функции

$$W_{1q}: (t, x) \rightarrow v_{q\zeta}^*(x) - \sum_{j=1}^m \mu_{q\zeta}^j t_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad q = \overline{1, s-1},$$

и

$$W_{2q}: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_{q\zeta}^j t_j, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}, \quad q = \overline{1, s-1},$$

где функции $v_{q\zeta}: x \rightarrow v_{q\zeta}^*(x) + \tilde{v}_{q\zeta}(x)i$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $q = \overline{1, s-1}$, находятся из системы (22.2), а вещественные числа

$$\mu_{q\zeta}^{*j} = \mathbf{p}_j^* v_{q\zeta}^*(x), \quad \tilde{\mu}_{q\zeta}^j = \mathbf{p}_j \tilde{v}_{q\zeta}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, s-1}.$$

Пример 5 (продолжение примера 5.2). Для вполне разрешимой системы (34.2), учитывая, что

$$\mathbf{p}_1^* v_1(x) = 1, \quad \mathbf{p}_1 \tilde{v}_1(x) = 0, \quad \mathbf{p}_2^* v_1(x) = 1, \quad \mathbf{p}_2 \tilde{v}_1(x) = -1, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

на основании следствия 4 строим на $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$ первые интегралы

$$W_{11}: (t, x) \rightarrow v_1^*(x) - t_1 - t_2 \quad \text{и} \quad W_{21}: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_1(x) + t_2,$$

где скалярные функции v_1^* , \tilde{v}_1 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный базис дифференциальной системы (34.2), а \mathcal{X} — произвольная область из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$.

Скалярные функции (35.2) — (37.2), W_{11} и W_{21} , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (34.2) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Пример 6 (продолжение примера 6.2). Для системы (38.2) на основании общего собственного вектора $\nu^{01} = (1, 1 + i, 0, 0, i, i)$, который соответствует собственным числам $\lambda_1^1 = 1 + i$, $\lambda_1^2 = -1$ и $\lambda_1^3 = 2$, по следствию 1 строим первый интеграл

$$W_3: (t, x) \rightarrow \arctg \frac{x_2 + x_5 + 1}{x_1 + x_2} - t_1, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{X},$$

где \mathcal{X} есть любая область из $\{x: x_1 + x_2 \neq 0, x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^5 .

На основании следствия 4 строим на областях $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{X}$ пространства \mathbb{R}^8 первые интегралы

$$W_4: (t, x) \rightarrow v_1^*(x) - t_1 + t_3 \quad \text{и} \quad W_5: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_1(x) - t_2,$$

где функции v_1^* и \tilde{v}_1 такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный интегральный базис системы Якоби (38.2).

Скалярные функции (39.2), (40.2), W_3 , W_4 , W_5 , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (38.2) на областях $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{X}$.

Пример 7 (продолжение примера 7.2). Для вполне разрешимой системы (41.2) на основании следствия 4 строим первые интегралы

$$W_{11}: (t, x) \rightarrow v_1^*(x) - t_1 - t_2, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{X},$$

$$W_{21}: (t, x) \rightarrow \tilde{v}_1(x) + t_2 - t_3, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{X},$$

и

$$W_{12}: (t, x) \rightarrow v_2^*(x) - 2t_3, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{X},$$

где скалярные функции v_1^* , \tilde{v}_1 и v_2^* такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен автономный интегральный базис вполне разрешимой системы Якоби (34.2), а \mathcal{X} есть произвольная область из множества $\{x: x_1 + x_3 + x_4 + 1 \neq 0\}$ пространства \mathbb{R}^5 .

Скалярные функции (42.2), (43.2), W_{11} , W_{21} и W_{12} , будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы (41.2) на областях $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{X}$.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

С целью однозначного толкования используемых понятий оговорим следующие положения.

Если функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$f(x) \geq 0, \forall x \in X, \quad \text{или} \quad f(x) \leq 0, \forall x \in X,$$

причём равенство

$$f(x) = 0$$

возможно лишь на множестве ν -мерной меры нуль, то функцию f назовём ν -*знакопостоянной* на области X , подразделяя на случаи ν -*знакоположительной* и ν -*знакоотрицательной* функции на области X .

При $\nu = n$ будем говорить о знакопостоянной, знакоположительной и знакоотрицательной функции на области X из пространства \mathbb{R}^n .

Если функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$f(x) > 0, \forall x \in X,$$

то её назовём *определённоположительной* на X , а если

$$f(x) < 0, \forall x \in X,$$

то — *определённоотрицательной* на X .

Для определённоположительных и определённоотрицательных функций введём объединяющий термин — *знакоопределённые*.

Лакуной Θ области X с гомотопической группой $\pi_\nu(X)$ из арифметического пространства \mathbb{R}^n , $\nu \leq n - 1$, назовём непустое линейно связное множество Θ такое, что $\Theta \cap X = \emptyset$ и существует гомеоморфное сфере S^ν многообразие, расположенное в области X , при непрерывном стягивании которого в точку множество Θ служит препятствием.

§ 1. Ограниченность числа компактных регулярных интегральных многообразий

Автономную систему уравнений в полных дифференциалах (ACD) будем рассматривать, когда элементы X_{ij} матрицы X являются непрерывно дифференцируемыми функциями на области \mathcal{X} из фазового пространства \mathbb{R}^n .

Введём в рассмотрение автономную обыкновенную дифференциальную систему n -го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (\text{AD})$$

где $f(x) = \text{colon}(f_1(x), \dots, f_n(x))$, причём векторная функция векторного аргумента $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непрерывно дифференцируемой на области \mathcal{X} , а $\frac{dx}{dt} = \text{colon}\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$.

Для систем (ACD) и (AD) из всего множества интегральных многообразий, расположенных в области \mathcal{X} фазового пространства \mathbb{R}^n , будем выделять регулярные.

Определение 1. Для автономной системы уравнений в полных дифференциалах (ACD) (автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD)) интегральное многообразие назовём **регулярным**, если оно является ориентируемым и на нём нет сингулярных точек (состояний равновесия) этой дифференциальной системы.

1. Автономная обыкновенная дифференциальная система

Признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий.

Пусть Ω_{t_0} есть ν -мерное при $3 \leq \nu \leq n$ многообразие, ограниченное $(\nu - 1)$ -мерными многообразиями $\Lambda_{t_0}^k$, $k = \overline{1, s}$, из пространства \mathbb{R}^n . При этом многообразия Ω_{t_0} , $\Lambda_{t_0}^k$, $k = \overline{1, s}$,

состоят из точек $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, доставляемых решениями $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in J_0$, автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD) такими, что

$$x(t_0) = x_0, t_0 \in J_0, x_0 \in \mathcal{X},$$

причём $n \geq 3$.

Составим многообразия $\Omega_{t_0+h}, \Lambda_{t_0+h}^k, k = \overline{1, s}$, состоящие из точек $x^h = (x_1^h, \dots, x_n^h)$, $x^h \in \mathcal{X}$, которые доставляются теми же решениями $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in J_0$, при $t = t_0 + h$, то есть,

$$x^h = x(t_0 + h), x^h \in \mathcal{X}.$$

Зададим отображения

$$\Omega: t \rightarrow \Omega(t), \Lambda^k: t \rightarrow \Lambda^k(t), k = \overline{1, s}, \forall t \in U(t_0),$$

где $U(t_0)$ — некоторая окрестность точки t_0 , такие, что

$$\Omega(t_0) = \Omega_{t_0}, \Lambda^k(t_0) = \Lambda_{t_0}^k, k = \overline{1, s}.$$

Обозначим через $\mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$ подпространство арифметического пространства \mathbb{R}^n , образованное базисными координатами x_{ξ_j} , $j = \overline{1, \nu}$, а через $\Omega_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ — естественную проекцию многообразия Ω_{t_0} на подпространство $\mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$.

Заметим, что среди всех ν -мерных подпространств $\mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$, образованных на основании ν координат из базиса $x_i, i = \overline{1, n}$, существует хотя бы одно, в котором многообразии $\Omega_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ имеет размерность

$$\dim \Omega_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu} = \nu.$$

С целью определённости допустим, что этим подпространством является $\mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$.

Через $V_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ обозначим ν -мерный объём многообразия $\Omega_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}$.

Как и ранее, определим отображения

$$\Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \rightarrow \Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t), \quad V^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \rightarrow V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t), \quad \forall t \in U(t_0),$$

такие, что

$$\Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t_0) = \Omega_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}, \quad V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t_0) = V_{t_0}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}.$$

При этом скалярная функция скалярного аргумента

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \rightarrow \int_{V_t^{\xi_1 \dots \xi_\nu}} dx_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu, \quad \forall t \in U(t_0), \quad x_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu \in \mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu,$$

представляет собой аддитивную функцию ν -мерного объёма.

У скалярной функции скалярного аргумента

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \rightarrow V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t), \quad \forall t \in J(t_0),$$

найдем первую производную

$$DV^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \rightarrow DV^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t), \quad \forall t \in U(t_0),$$

характеризующую изменение на окрестности $U(t_0)$ ν -мерного объёма $V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t)$.

Дадим независимой переменной t приращение Δt и найдём коэффициент при Δt в формуле Тейлора с остаточным членом $o(\Delta t)$ для скалярной функции

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t + \Delta t \rightarrow V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t + \Delta t), \quad \forall (t + \Delta t) \in U(t_0).$$

Пусть

$$\tilde{x}_i = x_i(t + \Delta t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда для любых $t + \Delta t$ из окрестности $U(t_0)$

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t + \Delta t) = \int_{V_{t+\Delta t}^{\xi_1 \dots \xi_\nu}} d\tilde{x}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu, \quad \tilde{x}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu \in \mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu.$$

С другой стороны, для любых $t + \Delta t$ из $U(t_0)$

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t + \Delta t) = \int_{V_t^{\xi_1 \dots \xi_\nu}} J(\tilde{x}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu; x_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu) dx_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu,$$

где $J(\tilde{x}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu; x_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu)$ — якобиан.

При этом

$$\tilde{x}_i = x_i + f_i(x)\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

а якобиан

$$J(\tilde{x}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu; x_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \partial_{x_{\xi_1}} f_{\xi_1}(x)\Delta t + o(\Delta t) & \partial_{x_{\xi_2}} f_{\xi_1}(x)\Delta t + o(\Delta t) & \dots \\ \dots & \partial_{x_{\xi_\nu}} f_{\xi_1}(x)\Delta t + o(\Delta t) \\ \partial_{x_{\xi_1}} f_{\xi_2}(x)\Delta t + o(\Delta t) & 1 + \partial_{x_{\xi_2}} f_{\xi_2}(x)\Delta t + o(\Delta t) & \dots \\ \dots & \partial_{x_{\xi_\nu}} f_{\xi_2}(x)\Delta t + o(\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_{\xi_1}} f_{\xi_\nu}(x)\Delta t + o(\Delta t) & \partial_{x_{\xi_2}} f_{\xi_\nu}(x)\Delta t + o(\Delta t) & \dots \\ \dots & 1 + \partial_{x_{\xi_\nu}} f_{\xi_\nu}(x)\Delta t + o(\Delta t) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \left(\operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu f(x) \right) \Delta t + o(\Delta t),$$

где

$$\operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu f(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \partial_{x_{\xi_j}} f_{\xi_j}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Поэтому первая производная скалярной функции

$$V^{\xi_1 \dots \xi_\nu} : t \rightarrow V^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t), \quad \forall t \in U(t_0),$$

находится по формуле

$$DV^{\xi_1 \dots \xi_\nu}(t) = \int_{V_t^{\xi_1 \dots \xi_\nu}} \operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu f(x) dx_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu, \quad \forall t \in U(t_0). \quad (1)$$

В зависимости от ранга гомотопической группы области \mathcal{X} укажем максимальное число возможных компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ системы (AD).

Для этого предварительно оговорим расположение лакун области \mathcal{X} относительно компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ в зависимости от ранга гомотопической группы области \mathcal{X} .

Лемма 1. Пусть λ -мерная линейно связная область \mathcal{X} из n -мерного пространства \mathbb{R}^n имеет при $3 \leq \nu \leq \lambda$ гомотопическую группу $\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})) = r$ и существуют однозначные непрерывно дифференцируемые на области \mathcal{X} скалярные функции

$$B_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

такие, что у однозначных векторных функций

$$M_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu : x \rightarrow B_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu(x) f(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

все расходимости

$$\operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu M_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu \quad (4)$$

являются ν -знакопостоянными на области \mathcal{X} . Тогда в любой линейно связной подобласти $\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ с гомотопической группой $\pi_{\nu-1}(\tilde{\mathcal{X}})$ ранга $d(\pi_{\nu-1}(\tilde{\mathcal{X}})) = k, k \leq r$, относительно компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ дифференциальной системы (AD) невозможна такая ситуация: всякое из $(\nu - 1)$ -мерных компактных регулярных интегральных многообразий $\Lambda^1, \dots, \Lambda^k$ содержит внутри себя лишь свою лауну, а $(\nu - 1)$ -мерное компактное регулярное интегральное многообразие Λ^{k+1} содержит внутри себя все эти k лакун.

Доказательство. Будем использовать следующий факт.

Если дифференциальная система (AD) в линейно связной области \mathcal{X} имеет компактное регулярное интегральное многообразие размерности $\nu - 1$, то автономная обыкновенная дифференциальная система, определяющая на \mathcal{X} векторное поле

$$M_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu(x) = B_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu(x)f(x),$$

имеет то же компактное интегральное $(\nu - 1)$ -мерное многообразие в области \mathcal{X} .

Допустим противное: всякое из $(\nu - 1)$ -мерных компактных регулярных интегральных многообразий $\Lambda^1, \dots, \Lambda^k$ системы (AD) содержит внутри себя свою лауну, а $(\nu - 1)$ -мерное компактное регулярное интегральное многообразие Λ^{k+1} содержит внутри себя все эти k лакун.

Тогда существует такое целиком расположенное в области $\tilde{\mathcal{X}}$ многообразие Ω размерности $\dim \Omega = \nu$, что его ограничивают многообразия $\Lambda^1, \dots, \Lambda^k, \Lambda^{k+1}$.

Пусть $\mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$ есть подпространство фазового пространства \mathbb{R}^n , в котором естественная проекция $\Omega_{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ многообразия Ω имеет размерность

$$\dim \Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu} = \nu.$$

Рассмотрим два логически возможных случая:

1) расходимость $\operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu M_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$ на области \tilde{X} ν -знакоположительна;

2) расходимость $\operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu M_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$ на области \tilde{X} ν -знакоотрицательна.

В первом случае на основании представления (1) приходим к выводу, что ν -мерный объём многообразия $\Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ при $t \rightarrow +\infty$ возрастает.

Учитывая же интегральность и регулярность многообразий Λ^j , а также то, что их размерности $\dim \Lambda^j = \nu - 1$, $j = \overline{1, k+1}$, и $\nu \geq 3$, приходим к противоречию.

Поскольку полученное противоречие будет наблюдаться для всякого подпространства $\mathbb{R}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu$, в котором естественная проекция $\Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu}$ многообразия Ω имеет размерность $\dim \Omega^{\xi_1 \dots \xi_\nu} = \nu$ при $\nu \geq 3$, то приходим к выводу о справедливости утверждения леммы в этом случае.

Во втором случае получаем аналогичное противоречие после замены t на $-t$. ■

Теорема 1 (*признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономной обыкновенной дифференциальной системы*). Пусть λ -мерная линейно связная область X пространства \mathbb{R}^n при $3 \leq \nu \leq \lambda$ имеет гомотопическую группу $\pi_{\nu-1}(X)$ ранга $d(\pi_{\nu-1}(X)) = r$ и существуют однозначные непрерывно дифференцируемые на области X скалярные функции (2), где ξ_1, \dots, ξ_ν — выборки размерности ν из n чисел, такие, что у однозначных векторных функций векторного аргумента (3) все расходимости (4) являются ν -знакопостоянными на области X . Тогда в области X система (AD) может иметь не более r компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Доказательство. При $r = 1$ утверждение теоремы 1 следует из леммы 1.

Предположим, что утверждение теоремы 1 верно при $r = k$, то есть, для всякой λ -мерной линейно связной области из \mathbb{R}^n с гомотопической группой $\pi_{\nu-1}$ ранга $d(\pi_{\nu-1}) = k$.

Для λ -мерной линейно связной области X с гомотопической группой $\pi_{\nu-1}(X)$ ранга $d(\pi_{\nu-1}(X)) = k + 1$ логически возможны два случая:

1) хотя бы одна из лакун не расположена внутри компактного регулярного интегрального многообразия размерности $\nu - 1$;

2) всякая лакуна расположена внутри хотя бы одного компактного регулярного интегрального многообразия, имеющего размерность $\nu - 1$.

В первом случае область X разобьём на две λ -мерные части так, чтобы внутри границы одной части содержалась вышеупомянутая лакуна, а внутри границы второй части — все остальные лакуны.

Тогда в первой части нет $(\nu - 1)$ -мерных компактных регулярных интегральных многообразий системы (AD), а во второй части их не более $k - 1$ (согласно допущению).

Стало быть, в первом случае в области X расположено не более $k - 1$ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Рассмотрим второй случай.

Предположим, что в области X расположено по крайней мере $k + 1$ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Тогда представляются две логические возможности:

а) нет компактного регулярного интегрального многообразия размерности $\nu - 1$, содержащего внутри себя все лакуны;

б) существует компактное регулярное интегральное многообразие размерности $\nu - 1$, содержащее внутри себя все лакуны.

Случай а. Пусть $\theta \geq 1$ лакун содержится внутри некоторого $(\nu - 1)$ -мерного компактного регулярного интегрального многообразия Λ^i и не существует $(\nu - 1)$ -мерного компактного регулярного интегрального многообразия Λ^j , которое, кроме этих θ лакун, содержит внутри себя ещё хотя бы одну из оставшихся $k - \theta$ лакун.

Область X разобьём на две λ -мерные части так, что внутри границы одной части находится выделенное $(\nu - 1)$ -мерное ком-

пактное регулярное интегральное многообразие Λ^i и вне Λ^i нет лакун.

Тогда в силу леммы 1 ни внутри, ни вне этого многообразия Λ^i не может располагаться $(\nu - 1)$ -мерное компактное регулярное интегральное многообразие, содержащее внутри себя только эти θ лакун.

Учитывая ранги гомотопических групп $\pi_{\nu-1}$ частей, заключаем, что в первой части может быть расположено не более θ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$, а во второй — не более $k - \theta$.

Следовательно, в области X может быть расположено не более k компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Таким образом, случай а) не реализуется.

Случай б. В силу леммы 1 все лакуны не могут располагаться внутри двух компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Тогда согласно той же лемме внутри внешнего компактного регулярного интегрального многообразия размерности $\nu - 1$ должна находиться хотя бы одна лакуна, которую, кроме внешнего, не содержит внутри себя ни одно компактное регулярное интегральное многообразие размерности $\nu - 1$.

Как и в случае 1), делим область, ограниченную внешним $(\nu - 1)$ -мерным компактным регулярным интегральным многообразием, на две λ -мерные части и приходим к выводу, что внутри $(\nu - 1)$ -мерного компактного регулярного интегрального многообразия содержится не более $k - 1$ компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Следовательно, в области X может быть расположено не более k компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

И случай б) не реализуется.

Полученные противоречия показывают, что и в случае 2) в области X не может быть более k компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ системы (AD). ■

Обратим внимание на вытекающее из теоремы 1

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 автономная обыкновенная дифференциальная система (AD) в

области \mathcal{X} не имеет неизоллированных $(\nu - 1)$ -мерных компактных регулярных интегральных многообразий.

При этом $(\nu - 1)$ -мерное компактное регулярное интегральное многообразие автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD) (автономной системы уравнений в полных дифференциалах (ACD)) назовём *изолированным*, если в некоторой его ε -окрестности нет других компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$ этой системы.

Пример 1. Автономная дифференциальная система пятого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - x_2 + x_1 g(x) \equiv f_1(x), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - x_2 + x_2 g(x) \equiv f_2(x), \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 - x_4 + x_3 g(x) \equiv f_3(x), \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_3 - x_4 + x_4 g(x) \equiv f_4(x), \\ \frac{dx_5}{dt} &= -5x_5 g(x) \equiv f_5(x),\end{aligned}\tag{5}$$

где функция

$$g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^5,$$

имеет трёхмерное компактное регулярное интегральное многообразие

$$\{x: g(x) = 1, x_5 = 0\},$$

так как производная в силу системы (5) равна

$$D_t(g(x) - 1)|_{(5)} = 2(g(x) - 1)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^5.$$

Единственность этого многообразия устанавливаем посредством теоремы 1 (в классе трёхмерных компактных регулярных интегральных многообразий).

Прямая

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

является прямой состояний равновесия системы (5).

Область \mathcal{X} из $\mathbb{R}^5 \setminus \{x: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$ имеет гомотопическую группу $\pi_3(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_3(\mathcal{X})) = 1$.

Пусть на области \mathcal{X}

$$B_{1234}^4(x) = g^{-3}(x), \quad B_{2345}^4(x) = B_{1345}^4(x) = B_{1245}^4(x) = B_{1235}^4(x) = 1.$$

Тогда у векторов-функций

$$M_{1234}^4(x) = B_{1234}^4(x)(f_1(x), \dots, f_4(x), 0), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M_{1235}^4(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), 0, f_5(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M_{1245}^4(x) = (f_1(x), f_2(x), 0, f_4(x), f_5(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M_{1345}^4(x) = (f_1(x), 0, f_3(x), f_4(x), f_5(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$M_{2345}^4(x) = (0, f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

расходимости являются 4-знакоопределёнными на области \mathcal{X} :

$$\operatorname{div}_{1234}^4 M_{1234}^4(x) = \frac{2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} > 0;$$

$$\operatorname{div}_{1235}^4 M_{1235}^4(x) = -(3 + 2x_4^2) < 0;$$

$$\operatorname{div}_{1245}^4 M_{1245}^4(x) = -(3 + 2x_3^2) < 0;$$

$$\operatorname{div}_{1345}^4 M_{1345}^4(x) = -(3 + 2x_2^2) < 0;$$

$$\operatorname{div}_{2345}^4 M_{2345}^4(x) = -(3 + 2x_1^2) < 0.$$

Отсюда, по теореме 1, заключаем о единственности указанного трёхмерного компактного регулярного интегрального многообразия.

2. Автономная система уравнений в полных дифференциалах

Признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий. Признаки отсутствия компактных регулярных орбит.

2.1. Ограниченность числа компактных интегральных многообразий

Автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n -го порядка

$$dx = X^j(x) dt_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\text{AD}j)$$

где $X^j(x) = \text{colon}(X_{1j}(x), \dots, X_{nj}(x))$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Будем считать, что векторные поля X^j , $j = \overline{1, m}$, непрерывно дифференцируемы на области \mathcal{X} из \mathbb{R}^n .

Методом фиксирования $m - 1$ независимых переменных t_j приходим к следующему выводу.

Лемма 1. *Пусть система (ACD) имеет регулярное интегральное многообразие. Тогда каждая из систем (ADj), $j = \overline{1, m}$, имеет это же регулярное интегральное многообразие. При этом компактность регулярных интегральных многообразий сохраняется.*

Эта лемма позволяет, основываясь на теореме 1.1, указать достаточные условия, при которых существует верхняя граница числа возможных компактных регулярных интегральных многообразий у системы (ACD).

Теорема 1 (признак ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономной системы уравнений в полных дифференциалах). *Пусть λ -мерная линейно связная область \mathcal{X} из \mathbb{R}^n имеет при $3 \leq \nu \leq \lambda$ гомотопическую группу $\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_{\nu-1}(\mathcal{X})) = r$ и существуют однозначные непрерывно дифференцируемые на области \mathcal{X} скалярные функции векторного аргумента*

$$B_{\xi_1 \dots \xi_\nu j}^\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

такие, что у однозначных векторных функций векторного аргумента

$$M_{\xi_1 \dots \xi_\nu j}^\nu : x \rightarrow B_{\xi_1 \dots \xi_\nu j}^\nu(x) X^j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

все расходимости

$$\operatorname{div}_{\xi_1 \dots \xi_\nu}^\nu M_{\xi_1 \dots \xi_\nu j}^\nu$$

являются ν -знакопостоянными на \mathcal{X} , $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда в области \mathcal{X} автономная система (ACD) может иметь не более r компактных регулярных интегральных многообразий размерности $\nu - 1$.

Используя оценки теоремы 1, последовательно по дифференциальным системам (AD1), (AD2), \dots , (ADm) устанавливаем итоговое число компактных регулярных интегральных многообразий.

Относительно неизолированных компактных регулярных интегральных многообразий системы (ACD) отметим вытекающую из теоремы 1.1 закономерность.

Следствие 1. Если существует $j \in \{1, \dots, m\}$ такое, что автономная обыкновенная дифференциальная система (ADj) удовлетворяет условиям теоремы 1, то в области \mathcal{X} автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) не имеет неизолированных компактных регулярных многообразий размерности $\nu - 1$.

Пример 1. Для автономной системы

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1 - x_2 + x_1 g(x)) dt_1 + (-x_1 + x_4 + x_1 g(x)) dt_2, \\ dx_2 &= (x_1 - x_2 + x_2 g(x)) dt_1 + (-x_2 + x_3 + x_2 g(x)) dt_2, \\ dx_3 &= (-x_3 - x_4 + x_3 g(x)) dt_1 + (-x_2 - x_3 + x_3 g(x)) dt_2, \\ dx_4 &= (x_3 - x_4 + x_4 g(x)) dt_1 + (-x_1 - x_4 + x_4 g(x)) dt_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где функция

$$g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

сфера

$$S^3 = \{x: g(x) = 1\}$$

является трёхмерным компактным регулярным интегральным многообразием:

$$d(g(x) - 1)|_{(1)} = 2(g(x) - 1)g(x)(dt_1 + dt_2), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^6.$$

Рассмотрим систему (AD1), индуцированную системой (1). Пусть

$$B_{1234}^4: x \rightarrow \frac{1}{g^3(x)}, \forall x \in \mathcal{X}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Тогда для системы (AD1) у вектора-функции M_{1234}^4 расхожимость является 4-знакоположительной на области \mathcal{X} :

$$\operatorname{div} M_{1234}^4(x) = \frac{2}{g^3(x)} > 0, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Учитывая, что ранг $d(\pi_3(\mathcal{X})) = 1$, по теореме 1.1 заключаем, что выделенная сфера S^3 является единственным трёхмерным компактным регулярным интегральным многообразием автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD1).

В соответствии с теоремой 1 эта сфера есть единственное трёхмерное компактное регулярное интегральное многообразие системы (1).

2.2. Признаки отсутствия компактных регулярных орбит

Рассмотрим автономную систему уравнений в полных дифференциалах (ACD) в случае, когда она является голоморфной, т.е. функции $X_{ij}: x \rightarrow X_{ij}(x)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, голоморфны на области \mathcal{X} фазового пространства \mathbb{R}^n .

Теорема 2. Пусть для вполне разрешимой голоморфной системы (IACD) существует такая однозначная непрерывно дифференцируемая на области \mathcal{X} скалярная функция $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\mathfrak{x}_j F(x) = H_j(x), \forall x \in \mathcal{X}, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

и хотя бы при одном $k \in \{1, \dots, m\}$ функция

$$H_k: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

знакоопределена на области \mathcal{X} . Тогда голоморфная система (IACD) не имеет компактных регулярных орбит, целиком расположенных в области \mathcal{X} .

Доказательство. Допустим, что в области \mathcal{X} расположена компактная регулярная орбита вполне разрешимой голоморфной системы (IACD), соответствующая периодическому решению

$$x: t \rightarrow x(t), \forall t \in \mathcal{T},$$

с периодом $T = (T_1, \dots, T_m)$ и начальным условием

$$x_0 = x(t_0), t_0 = (t_{01}, \dots, t_{0m}), t_0 \in \mathcal{T}, x_0 \in \mathcal{X}.$$

Тогда

$$T_j \neq 0, j = \overline{1, m},$$

и, по теореме 5.4 из [16, с. 31], это решение продолжимо на всё арифметическое пространство \mathbb{R}^m .

Полагая, что функция $H_k: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ определённоположительная (определённоотрицательная) на области \mathcal{X} , из системы тождеств (2) имеем, что при

$$t_j = t_{0j}, j = \overline{1, m}, j \neq k, t_{0k} \leq t_k \leq t_{0k} + T_k$$

функция

$$v: t_k \rightarrow F(x(t))$$

строго возрастает (строго убывает).

Поэтому

$$v(t_{0k}) < v(t_{0k} + T_k) \quad (v(t_{0k}) > v(t_{0k} + T_k)),$$

что, с учётом однозначности F , противоречит периодичности решения $x: t \rightarrow x(t), \forall t \in \mathcal{T}$.

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Заметим, что если область \mathcal{X} является односвязной, то непрерывно дифференцируемая функция $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ является однозначной на \mathcal{X} .

Признак, сформулированный в теореме 2, согласуется с теоремой Пуанкаре [112, с. 112 — 136] и её обобщённым вариантом [115], когда при использовании обобщённой функции Ляпунова [120] устанавливается отсутствие замкнутых траекторий у обыкновенной автономной дифференциальной системы второго порядка.

Относительно вполне разрешимой линейной однородной системы уравнений в полных дифференциалах (1.1.4.2) в соответствии с теоремой 1.1 из [8, с. 30] (или леммой 7.5.1 из [10, с. 249]) и теоремой 2 можем утверждать следующее.

Теорема 3. *Если хотя бы у одной матрицы A_k собственные числа $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ таковы, что*

$$\lambda_i^k + \lambda_\xi^k \neq 0, \quad i, \xi = \overline{1, n}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

то вполне разрешимая линейная однородная система уравнений в полных дифференциалах (1.1.4.2) не имеет компактных регулярных орбит.

Введём в рассмотрение 1-форму

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) dx_i, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

которая является точной на области \mathcal{X} и имеет непрерывно дифференцируемые коэффициенты-функции $w_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда (см. пункт 2 введения) существует такая однозначная скалярная функция

$$F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

что полный дифференциал

$$dF(x) = \omega(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Значит, действия автономных линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{x}_j F(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) X_{ij}(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

и, по теореме 2, заключаем, что имеет место

Теорема 4. *Если для вполне разрешимой голоморфной автономной системы уравнений в полных дифференциалах (IACD) существует точная на области \mathcal{X} линейная дифференциальная форма (3) такая, что хотя бы при одном k из множества $\{1, \dots, m\}$ сумма*

$$\sum_{i=1}^n w_i(x) X_{ik}(x)$$

знакоопределена на области \mathcal{X} , то система (IACD) не имеет компактных регулярных орбит, целиком расположенных в области \mathcal{X} .

Отметим, что теорема 4 (в отличие от теоремы 2) не требует знать функцию F . Она предполагает лишь знание знакоопределённости на области \mathcal{X} её производной (4) в силу одной из автономных обыкновенных дифференциальных систем (ADk), индуцированных вполне разрешимой голоморфной на области \mathcal{X} системой уравнений в полных дифференциалах (IACD).

§ 2. Ограниченность числа компактных интегральных гиперповерхностей

Наряду с автономной обыкновенной дифференциальной системой (AD), автономной системой уравнений в полных дифференциалах (ACD) будем рассматривать линейную однородную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{x}_j(x)y = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\partial ACD)$$

систему уравнений Пфаффа (Pf) и систему внешних дифференциальных уравнений

$$\xi_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (ED)$$

Каждая из дифференциальных систем (AD), (ACD), (∂ACD), (Pf), (ED) голоморфна на области \mathcal{X} из \mathbb{R}^n , т.е. векторная функция векторного аргумента $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, матрица $X: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{M}^{n, m}$, линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{x}_j(x) = \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

линейные дифференциальные формы первого порядка

$$\omega_j(x) = \sum_{i=1}^n w_{ji}(x) dx_i, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

составлены на основании голоморфных на области \mathcal{X} пространства \mathbb{R}^n скалярных функций векторного аргумента

$$f_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_{ij}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad w_{ij}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

а у p_j -форм ξ_j , $1 \leq p_j \leq n - 1$, $j = \overline{1, m}$, коэффициенты голоморфны на области \mathcal{X} .

1. Система внешних дифференциальных уравнений

Признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей. Свойство суммарного индекса множества лакун внутри компактных интегральных гиперповерхностей.

Теорема 1 (признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы внешних дифференциальных уравнений). Пусть область X из \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$ и существуют $(n-2)$ -форма α и $(n-p_j-1)$ -формы ζ_j , $j = \overline{1, m}$, с дважды непрерывно дифференцируемыми на области X коэффициентами у $(n-2)$ -формы α и непрерывно дифференцируемыми на области X коэффициентами у $(n-p_j-1)$ -форм ζ_j , $j = \overline{1, m}$, такие, что на области X внешний дифференциал суммы

$$d(d\alpha(x)|_{(ED)} + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)) = b(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (1)$$

где функция $b: X \rightarrow \mathbb{R}$ знакопостоянна на области X . Тогда в области X голоморфная система внешних дифференциальных уравнений (ED) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.1 при $\nu = n$ и основано на следующем утверждении.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда во всякой подобласти Ω области X с гомотопической группой $\pi_{n-1}(\Omega)$ ранга $d(\pi_{n-1}(\Omega)) = s$ при $s \leq r$ относительно компактных интегральных гиперповерхностей системы внешних дифференциальных уравнений (ED) невозможна такая ситуация: всякая из s лакун содержится внутри своей компактной интегральной гиперповерхности $\partial\Sigma_1, \dots, \partial\Sigma_s$, компактная интегральная гиперповерхность $\partial\Sigma_{s+1}$ содержит внутри себя эти s лакун, причём гипер-

поверхности $\partial\Sigma_1, \dots, \partial\Sigma_s$ не пересекаются, не содержатся друг в друге и все целиком располагаются внутри гиперповерхности $\partial\Sigma_{s+1}$.

Доказательство проведём от противного, полагая, что описанная в лемме ситуация имеет место.

Через Σ обозначим область, ограниченную гиперповерхностью $\partial\Sigma = \bigcup_{\tau=1}^{s+1} \partial\Sigma_\tau$.

По формуле Стокса для ориентированного многообразия с краем с учётом тождества (1) устанавливаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Sigma} \left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \right) = \\ & = (-1)^n \int_{\Sigma} d \left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \right) = (-1)^n \int_{\Sigma} b(x) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя теорему Пуанкаре (теорема 1.2.0.0), в силу системы внешних дифференциальных уравнений (ED) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Sigma} \left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x) \right) |_{(\text{ED})} = \\ & = (-1)^n \int_{\Sigma} d \left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} \right) + \int_{\partial\Sigma} \sum_{j=1}^m (\xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)) |_{(\text{ED})} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу связи (2) равенство (3) невозможно по причине того, что у кратного интеграла, расположенного в правой части цепочки равенств (2), подынтегральная функция знакопостоянна на области \mathcal{X} , а $\Sigma \subset \Omega \subset \mathcal{X}$.

Это противоречие и доказывает утверждение леммы 1. ■

Пример 1. Система внешних дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \xi_1(x) &\equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(x_2^2 dx_1 + (x_3 + x_4^2) dx_2) + \\
 &\quad + (x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_4^2) dx_3 + \\
 &\quad + (2x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_4^2) dx_4 = 0, \\
 \xi_2(x) &\equiv dx_1 + x_1(-2x_2 + x_1^2) dx_2 + (x_1^2 + x_3^2) dx_3 + (x_2^2 + x_4^2) dx_4 = 0, \\
 \xi_3(x) &\equiv (-1 + 2x_1 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(1 - x_2^2)) dx_1 + \quad (4) \\
 &\quad + (5 + 2x_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(5 + x_3 + x_4^2)) dx_2 + \\
 &\quad + (-x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_4^2) dx_3 + \\
 &\quad + (-2x_2 + x_3 - 3x_4 - 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 5x_4^2) dx_4 = 0, \\
 \xi_4(x) &\equiv x_1^2 dx_1 \wedge dx_4 + x_2^2 dx_2 \wedge dx_3 = 0
 \end{aligned}$$

такова, что для дифференциальных 2-форм

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= x_1 dx_3 \wedge dx_4, \quad \zeta_1(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} dx_3 \wedge dx_4, \\
 \zeta_2(x) &= \zeta_3(x) = 0,
 \end{aligned}$$

и 1-формы

$$\zeta_4(x) = 0$$

справедливы соотношения на области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$:

$$\begin{aligned}
 d\alpha(x)|_{(4)} &= x_1(2x_2 - x_1^2) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \\
 \xi_1(x) \wedge \zeta_1(x) &= x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (x_3 + x_4^2) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \\
 \xi_2(x) \wedge \zeta_2(x) &= \xi_3(x) \wedge \zeta_3(x) = \xi_4(x) \wedge \zeta_4(x) = 0, \\
 d\left(d\alpha(x)|_{(4)} + \sum_{j=1}^4 \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)\right) &= -3x_1^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.
 \end{aligned}$$

Значит (по теореме 1), в области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ с гомотопической группой π_3 ранга $d = 1$ система (4) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если теперь учесть, что

$$dw(x) = (\xi_1(x) + \xi_3(x))|_{w(x)=0},$$

где

$$w: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

то сфера

$$S^3 = \{x: w(x) = 0\}$$

и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью системы внешних дифференциальных уравнений (4).

Возможность того, что та или иная лакуна или совокупность лагун области \mathcal{X} не содержатся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы внешних дифференциальных уравнений (ED), может быть рассмотрена на основании понятия инвариантности дифференциальной формы на области \mathcal{X} относительно системы (ED).

Дифференциальную $(n - 2)$ -форму θ назовём *инвариантной* на области \mathcal{X} относительно системы внешних дифференциальных уравнений (ED), если она является замкнутой на любом $(n - 2)$ -мерном интегральном многообразии этой системы, то есть, если

$$d\theta(x)|_{(ED)} = 0, \forall x \in \mathcal{X},$$

или, иначе, если существуют $(n - p_j - 1)$ -формы γ_j , $j = \overline{1, m}$, с непрерывно дифференцируемыми на области \mathcal{X} коэффициентами, такие, что внешний дифференциал

$$d\theta(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \gamma_j(x), \forall x \in \mathcal{X}.$$

Индексом лакуны Θ области \mathcal{X} из пространства \mathbb{R}^n относительно замкнутой дифференциальной $(n - 1)$ -формы δ на об-

ласти \mathcal{X} назовём число

$$\text{ind}_\delta \Theta = \int_S \delta,$$

где S — многообразие, гомеоморфное гиперсфере, расположенное в области \mathcal{X} , при непрерывном стягивании которого в точку лакуна Θ и лишь она служит препятствием.

Теорема 2. Пусть область \mathcal{X} из арифметического пространства \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_{n-1}(\mathcal{X})) = r$ и существуют $(n-2)$ -формы α и θ , а также $(n-p_j-1)$ -формы ζ_j , $j = \overline{1, m}$, с дважды непрерывно дифференцируемыми на области \mathcal{X} коэффициентами у $(n-2)$ -форм α и θ и непрерывно дифференцируемыми на области \mathcal{X} коэффициентами у $(n-p_j-1)$ -форм ζ_j , $j = \overline{1, m}$, такие, что $(n-2)$ -форма θ является инвариантной на области \mathcal{X} относительно голоморфной системы внешних дифференциальных уравнений (ED) и на \mathcal{X} внешний дифференциал суммы

$$\begin{aligned} d\left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} + d\theta(x) + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)\right) = \\ = b(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где функция $b: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ знакопостоянна на \mathcal{X} . Тогда:

1) в области \mathcal{X} система (ED) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей;

2) всякое множество лакун области \mathcal{X} , содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы внешних дифференциальных уравнений (ED), имеет нулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$ -формы $d\theta$.

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 1 с учётом того, что на \mathcal{X} внешний дифференциал

$$\begin{aligned}
& d\left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} + d\theta(x) + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)\right) = \\
& = d\left(d\alpha(x)|_{(\text{ED})} + \sum_{j=1}^m \xi_j(x) \wedge \zeta_j(x)\right),
\end{aligned}$$

и, значит, из условия (5) вытекает условие (1).

Второе утверждение докажем методом от противного.

Пусть лакуны $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ имеют ненулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$ -формы $d\theta$ на области \mathcal{X} :

$$\sum_{\tau=1}^s \text{ind}_{d\theta} \Theta_\tau \neq 0.$$

Тогда по любой компактной гиперповерхности $\partial\Xi$ из области \mathcal{X} , содержащей внутри себя лакуны $\Theta_\tau, \tau = \overline{1, s}$, и только их, интеграл

$$\int_{\partial\Xi} d\theta(x) \neq 0.$$

Допустим, что в множестве компактных гиперповерхностей $\partial\Xi$ существует интегральная система внешних дифференциальных уравнений (ED); обозначим её $\partial\Sigma$. Тогда и интеграл

$$\int_{\partial\Sigma} d\theta(x) \neq 0.$$

С другой стороны, $(n-2)$ -форма θ инвариантна на области \mathcal{X} относительно системы (ED), а значит, интеграл

$$\int_{\partial\Sigma} d\theta(x) = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ■

2. Система уравнений Пфаффа

Первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей. Свойство суммарного индекса множества лакун внутри компактных интегральных гиперповерхностей. Второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей. Отсутствие изолированных компактных интегральных гиперповерхностей у линейной системы уравнений Пфаффа.

Непосредственными следствиями теорем 1.1 и 2.1 на случай системы уравнений Пфаффа являются следующие утверждения.

Теорема 1 (первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений Пфаффа). Пусть область X из n -мерного арифметического пространства \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$ и существуют $(n-2)$ -формы α и ℓ_j , $j = \overline{1, m}$, с дважды непрерывно дифференцируемыми на области X коэффициентами у $(n-2)$ -формы α и непрерывно дифференцируемыми на области X коэффициентами у $(n-2)$ -форм ℓ_j , $j = \overline{1, m}$, такие, что внешний дифференциал суммы на области X

$$d(d\alpha(x)|_{(Pf)} + \sum_{j=1}^m \omega_j(x) \wedge \ell_j(x)) = b(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где функция $b: X \rightarrow \mathbb{R}$ знакопостоянна на области X . Тогда в области X голоморфная система уравнений Пфаффа (Pf) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Теорема 2. Пусть область X из n -мерного арифметического пространства \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$ и существуют $(n-2)$ -формы α , θ и ℓ_j , $j = \overline{1, m}$, с дважды непрерывно дифференцируемыми на области X коэффициентами у $(n-2)$ -форм α и θ и непрерывно дифференцируемыми на области X коэффициентами у $(n-2)$ -форм ℓ_j , $j = \overline{1, m}$, такие, что $(n-2)$ -форма θ является инвариантной на области X от-

носителем голоморфной системы уравнений Пфаффа (Pf), и внешний дифференциал суммы на области \mathcal{X}

$$d\left(d\alpha(x)|_{(\text{Pf})} + d\theta(x) + \sum_{j=1}^m \omega_j(x) \wedge \ell_j(x)\right) = b(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где функция $b: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ знакопостоянна на \mathcal{X} . Тогда:

1) на области \mathcal{X} система уравнений Пфаффа (Pf) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей;

2) всякое множество лакун области \mathcal{X} , содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы уравнений Пфаффа (Pf), имеет нулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$ -формы $d\theta$.

Пример 1. Система уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &\equiv x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(x_4 dx_3 - x_3 dx_4) = 0, \\ \omega_2(x) &\equiv x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + (2x_3 - x_4) dx_3 + (x_3 + 2x_4) dx_4 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

такова, что на области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ для дифференциальных 2-форм

$$\alpha(x) = 0, \quad \ell_1(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} dx_1 \wedge dx_2, \quad \ell_2(x) = dx_3 \wedge dx_4$$

справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_1(x) \wedge \ell_1(x) &= x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4, \\ \omega_2(x) \wedge \ell_2(x) &= x_1 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \\ d(\omega_1(x) \wedge \ell_1(x) + \omega_2(x) \wedge \ell_2(x)) &= -2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned}$$

Стало быть (по теореме 1), в области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ с гомотопической группой π_3 ранга $d = 1$ система уравнений Пфаффа (1) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если учесть, что

$$dw(x) = (\omega_1(x) + \omega_2(x))|_{w(x)=0},$$

где функция

$$w: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

то сфера

$$S^3 = \{x: w(x) = 0\}$$

и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью.

Пример 2. Система уравнений Пфаффа

$$\omega_1(x) = 0, \quad \omega_2(x) = 0, \quad (2)$$

где 1-формы

$$\omega_1(x) = x_3((x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_1 + x_3 dx_2 + x_2((x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3,$$

$$\begin{aligned} \omega_2(x) = & \left((\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 - 1 + x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2) \right) dx_1 + \\ & + \left((\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 - 1 + x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2) \right) dx_2 + \\ & + x_3(x_1^2 + x_2^2) dx_3, \end{aligned}$$

такова, что на области $\mathbb{R}^3 \setminus \{(2, 0, 0)\}$ для дифференциальных 1-форм

$$\alpha(x) = 0, \quad \ell_1(x) = \frac{1}{(x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2} dx_2, \quad \ell_2(x) = 0$$

справедливы соотношения:

$$\omega_1(x) \wedge \ell_1(x) = x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_2 \wedge dx_3, \quad \omega_2(x) \wedge \ell_2(x) = 0,$$

$$d(\omega_1(x) \wedge \ell_1(x) + \omega_2(x) \wedge \ell_2(x)) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Следовательно (по теореме 1), в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{(2, 0, 0)\}$ с гомотопической группой π_2 ранга $d = 1$ система уравнений Пфаффа (2) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если теперь учесть, что

$$dw(x) = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} \omega_2(x)|_{w(x)=0},$$

где функция

$$w: x \rightarrow (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2)^2 + x_3^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

то двумерный тор

$$\{x: w(x) = 0\}$$

и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью.

Укажем ещё один признак для системы уравнений Пфаффа.

Теорема 3 (второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений Пфаффа). Пусть область X пространства \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$ и существует непрерывно дифференцируемое на области V векторное поле $B: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, ортогональное векторным полям

$$W_j(x) = (w_{j1}(x), \dots, w_{jn}(x)), \forall x \in X, j = \overline{1, m},$$

такое, что расходимость $\operatorname{div} B$ знакопостоянна на области X . Тогда в области X голоморфная система уравнений Пфаффа (Pf) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.1 при $\nu = n$ и основано на следующей закономерности.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда в подобласти Ω области X с гомотопической группой $\pi_{n-1}(\Omega)$ ранга $d(\pi_{n-1}(\Omega)) = s$ при $s \leq r$ относительно компактных интегральных гиперповерхностей голоморфной системы уравнений Пфаффа (Pf) невозможна ситуация, описанная в лемме 1.1.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1, при этом используем формулу Остроградского [95, с. 111]

$$\int_{\partial\Sigma} B(x) \cdot \vec{n}(x) dS = (-1)^n \int_{\Sigma} \operatorname{div} B(x) d\Sigma,$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к интегральной гиперповерхности $\partial\Sigma = \bigcup_{\tau=1}^{s+1} \partial\Sigma_{\tau}$ системы уравнений Пфаффа (Pf), с учётом

ортогональности векторных полей A_j , $j = \overline{1, m}$, к гиперповерхности $\partial\Sigma$ и знакопостоянства на области \mathcal{X} скалярной функции векторного аргумента $\operatorname{div} B: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. ■

Пример 3. Система уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &\equiv (x_1 - x_2 + x_2 g(x)) dx_1 + (x_1 + x_2 - x_1 g(x)) dx_2 + \\ &+ (x_3 - x_4 + x_4 g(x)) dx_3 + (x_3 + x_4 - x_3 g(x)) dx_4 = 0, \\ \omega_2(x) &\equiv (x_3 - x_4 + x_4 g(x)) dx_1 + (x_3 + x_4 - x_3 g(x)) dx_2 + \\ &+ (x_1 - x_2 + x_2 g(x)) dx_3 + (x_1 + x_2 - x_1 g(x)) dx_4 = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где скалярная функция

$$g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

такова, что непрерывно дифференцируемое на $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ векторное поле

$$\begin{aligned}B: x &\rightarrow g^{-3}(x) (-x_1 - x_2 + x_1 g(x), x_1 - x_2 + x_2 g(x), \\ &- x_3 - x_4 + x_3 g(x), x_3 - x_4 + x_4 g(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\},\end{aligned}$$

ортогонально индуцированным системой (3) векторным полям W_1 и W_2 , и его расходимость

$$\operatorname{div} B(x) = 2g^{-3}(x)$$

знакоположительна на этой области.

Стало быть (по теореме 3), в области $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ с гомотопической группой π_3 ранга $d = 1$ система уравнений Пфаффа (3) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

Если учесть, что

$$dw(x) = 2\omega_1(x)|_{w(x)=0},$$

где $w(x) = g(x) - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$, то сфера

$$S^3 = \{x: w(x) = 0\}$$

и будет этой компактной интегральной гиперповерхностью.

Следствие 1. *Линейная система уравнений Пфаффа не имеет изолированных компактных интегральных гиперповерхностей.*

Доказательство. Пусть линейная система уравнений Пфаффа индуцирует 1-формы ω_j , $j = \overline{1, m}$, с линейными координатными функциями.

Рассмотрим две логические возможности:

1) существует номер $k \in \{1, \dots, m\}$ такой, что

$$d\omega_k(x) \neq 0;$$

2) на пространстве \mathbb{R}^n

$$d\omega_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

У внешнего дифференциала

$$d\omega_k(x) = \sum_{1 \leq i < \tau \leq n} c_{i\tau k} dx_i \wedge dx_\tau$$

в первом случае коэффициенты $c_{i\tau k}$ суть числа из поля \mathbb{R} , одновременно не обращающиеся в нуль.

Пусть $c_{\lambda\rho k} \neq 0$, $\lambda < \rho$. В качестве $(n-2)$ -формы возьмём

$$\begin{aligned} \ell(x) = & dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{\lambda-1} \wedge dx_{\lambda+1} \wedge dx_{\lambda+2} \wedge \dots \wedge dx_{\rho-1} \wedge \\ & \wedge dx_{\rho+1} \wedge dx_{\rho+2} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Тогда внешний дифференциал внешнего произведения

$$d(\omega_k(x) \wedge \ell(x)) = \pm c_{\lambda\rho k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда (по теореме 1) заключаем, что линейная система уравнений Пфаффа не имеет не только изолированных компактных, но и компактных интегральных гиперповерхностей.

Во втором случае 1-формы ω_j , $j = \overline{1, m}$, суть полные дифференциалы на \mathbb{R}^n , и, стало быть, линейная система уравнений Пфаффа имеет базис первых интегралов

$$F_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, j = \overline{1, m},$$

в виде полиномов не выше второй степени.

В силу алгебраичности базиса первых интегралов заключаем об отсутствии изолированных компактных интегральных гиперповерхностей. ■

При доказательстве следствия 1 были доказаны и такие закономерности относительно компактных интегральных гиперплоскостей линейной системы уравнений Пфаффа.

Следствие 2. *Если у линейной системы Пфаффа*

$$\omega_j(x) = 0, j = \overline{1, m},$$

хотя бы при одном $k, 1 \leq k \leq m$, внешний дифференциал

$$d\omega_k(x) \neq 0,$$

то она не имеет компактных интегральных гиперповерхностей.

Следствие 3. *Неизолированные компактные интегральные гиперповерхности линейной системы уравнений Пфаффа являются алгебраическими гиперповерхностями второго порядка.*

3. Автономная обыкновенная дифференциальная система

Признаки ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей.

Автономная обыкновенная дифференциальная система (AD) индуцирует систему $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений Пфаффа

$$\chi_{qh}(x) = 0, 1 \leq q < h \leq n, \quad (1)$$

где 1-формы

$$\chi_{qh}(x) = f_q(x) dx_h - f_h(x) dx_q, \forall x \in X, 1 \leq q < h \leq n,$$

являются замкнутыми на области X .

Автономный интегральный базис системы (AD) является базисом первых интегралов системы (1) и наоборот.

Это позволяет перенести теоремы 1.2 и 2.2 на случай системы (AD), которые соответственно назовём теоремами 1.2D (первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей автономной обыкновенной дифференциальной системы) и 2.2D.

Пример 1. Используя первый признак ограниченности числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей (теорема 1.2D), докажем, что автономная обыкновенная дифференциальная система третьего порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3 g(x), \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_3 + x_2 g(x), \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_2 - x_1 g(x), \quad (2)$$

где скалярная функция

$$g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

имеет одну компактную интегральную поверхность в области $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Предварительно устанавливаем, что сфера

$$S^2 = \{x: w(x) = 0\},$$

где $w: x \rightarrow g(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}^3$, является компактной интегральной поверхностью системы (2):

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{(2)} = 2x_2^2 w(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

На основании обыкновенной дифференциальной системы (2) составим уравнение Пфаффа

$$\chi_{12}(x) = 0,$$

где

$$\chi_{12}(x) = x_3 g(x) dx_2 - (-x_2 + x_3 + x_2 g(x)) dx_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Непрерывно дифференцируемая на области \mathcal{X}_0 1-форма

$$\omega(x) = -\frac{1}{g(x)} dx_1, \quad \forall x \in \mathcal{X}_0,$$

такова, что внешний дифференциал внешнего произведения

$$d(\chi_{12}(x) \wedge \omega(x)) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \forall x \in X_0.$$

Поэтому в соответствии с теоремой 1.2D в области X_0 с гомотопической группой $\pi_2(X_0)$ ранга $d(\pi_2(X_0)) = 1$ система (2) может иметь не более одной компактной интегральной поверхности.

Таковой является ранее указанная сфера S^2 .

На основании первого признака ограниченности числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей автономной обыкновенной дифференциальной системы (теорема 1.2D) докажем следующую закономерность, когда ограниченность числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей устанавливается по виду системы (AD), не прибегая к представлению её системой уравнений Пфаффа (1).

Теорема 1. Пусть область X из \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$ и существует непрерывно дифференцируемая на области X скалярная функция $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что у векторного поля

$$Z: x \rightarrow \varphi(x)f(x), \forall x \in X,$$

расходимость $\operatorname{div} Z$ знакопостоянна на области X . Тогда в области X голоморфная автономная обыкновенная дифференциальная система (AD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Доказательство. Следуя теореме 1.2D, в качестве 1-форм ω_i , $i = \overline{1, n}$, на области X возьмём

$$\omega_\nu(x) = f_\nu(x) dx_{\nu+1} - f_{\nu+1}(x) dx_\nu, \nu = \overline{1, n-1},$$

$$\omega_n(x) = f_n(x) dx_1 - f_1(x) dx_n,$$

а в качестве $(n-2)$ -форм ℓ_i , $i = \overline{1, n}$, на области X возьмём

$$\ell_\nu(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+2} \wedge dx_{\nu+3} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

$$\omega_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \varphi(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

где $\nu = \overline{1, n-1}$, а скалярная функция $\varphi \in C^1(\mathcal{X})$.

Тогда на области \mathcal{X} сумма внешних произведений

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \wedge \ell_i(x) = \\ & = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge dx_{i+2} \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

и внешний дифференциал

$$d\left(\varphi(x) \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \wedge \ell_i(x)\right) = \operatorname{div} Z(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

По теореме 1.2D заключаем о справедливости теоремы 1. ■

Заметим, что теорема 1 является следствием и теоремы 3.2 на случай голоморфной автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD).

Это следует из того, что векторное поле

$$B: x \rightarrow \varphi(x)f(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

ортогонально на области \mathcal{X} векторным полям

$$(0, \dots, 0, -f_h(x), 0, \dots, 0, f_q(x), 0, \dots, 0), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad 1 \leq q < h \leq n,$$

ассоциированным с дифференциальными формами χ_{qh} .

Поэтому теорему 1 назовём вторым признаком ограниченности числа возможных компактных интегральных гиперповерхностей автономной обыкновенной дифференциальной системы.

При $n = 2$ в области \mathcal{X} с фундаментальной группой $\pi_1(\mathcal{X})$ рангов $d(\pi_1(\mathcal{X})) = 0$ и $d(\pi_1(\mathcal{X})) = 1$ теорема 1 соответствует признакам Дюлака отсутствия (когда $d(\pi_1(\mathcal{X})) = 0$) и возможности наличия не более одной (когда $d(\pi_1(\mathcal{X})) = 1$) замкнутой кри-

вой, составленной из траекторий системы (AD) при $n = 2$ [9, с. 120; 79, с. 226 – 229].

Для автономной дифференциальной системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (3)$$

с голоморфными на области X из плоскости \mathbb{R}^2 правыми частями $P: X \rightarrow \mathbb{R}$ и $Q: X \rightarrow \mathbb{R}$ следствием теоремы 1.2D является

Теорема 2. Пусть плоская область X будет $(r+1)$ -связной и существуют непрерывно дифференцируемая на области X функция $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$, дважды непрерывно дифференцируемая на области X функция $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что функция

$$p_1: (x, y) \rightarrow \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \partial_x \alpha(x, y) \quad \left(p_2: (x, y) \rightarrow \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \partial_y \alpha(x, y) \right)$$

на области X непрерывно дифференцируема, а функция

$$q_1: (x, y) \rightarrow \partial_x (p_1(x, y) + \partial_y \alpha(x, y)) + \operatorname{div} A(x, y) \quad (4)$$

$$\left(q_2: (x, y) \rightarrow -\partial_y (\partial_x \alpha(x, y) + p_2(x, y)) + \operatorname{div} A(x, y) \right) \quad (5)$$

с $Dq_1 = X$ ($Dq_2 = X$) знакопостоянна на X , где непрерывно дифференцируемое на X векторное поле

$$A(x, y) = \ell(x, y)(P(x, y), Q(x, y)).$$

Тогда в области X может быть расположено не более r простых замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (3).

Действительно,

$$d\alpha(x, y)|_{(3)} = \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \partial_x \alpha(x, y) + \partial_y \alpha(x, y) \right) dy, \quad \forall (x, y) \in X,$$

и

$$d\alpha(x, y)|_{(3)} = \left(\partial_x \alpha(x, y) + \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \partial_y \alpha(x, y) \right) dx, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}.$$

Тогда, соответственно, внешний дифференциал

$$\begin{aligned} & d(d\alpha(x, y)|_{(3)} + \omega(x, y)(P(x, y) dy - Q(x, y) dx)) = \\ & = \left(\partial_x \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \partial_x \alpha(x, y) + \partial_y \alpha(x, y) \right) + \partial_x (\omega(x, y)P(x, y)) + \right. \\ & \quad \left. + \partial_y (\omega(x, y)Q(x, y)) \right) dx \wedge dy, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & d(d\alpha(x, y)|_{(3)} + \omega(x, y)(P(x, y) dy - Q(x, y) dx)) = \\ & = \left(-\partial_y \left(\partial_x \alpha(x, y) + \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \partial_y \alpha(x, y) \right) + \partial_x (\omega(x, y)P(x, y)) + \right. \\ & \quad \left. + \partial_y (\omega(x, y)Q(x, y)) \right) dx \wedge dy, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

По теореме 1.2D заключаем о справедливости теоремы 2. ■

На случай замкнутых кривых, являющихся предельными циклами системы (3), теорема 2 справедлива для системы (3) с непрерывно дифференцируемыми на области \mathcal{X} правыми частями P и Q , ввиду того, что предельные циклы как замкнутые (а не только компактные) траектории определяются периодическими решениями системы (3) (ср. с [120]).

Для автономных обыкновенных дифференциальных систем (AD) особый интерес представляют изолированные компактные регулярные интегральные гиперповерхности, то есть, такие компактные интегральные гиперповерхности, на которых нет состояний равновесия системы (AD).

Теорема 3 (*признак ограниченности числа изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей обыкновенной дифференциальной системы*). Пусть область X из \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$ и существует такая голоморфная знакоопределённая на X функция $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, что векторное поле

$$h: x \rightarrow g(x)f(x), \quad \forall x \in X, \quad (6)$$

является соленоидальным на X . Тогда в области X голоморфная автономная обыкновенная дифференциальная система (AD) может иметь не более r изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.

Доказательство этой теоремы согласуется с доказательством теоремы 1.1.1 при $\nu = n$ и основано на следующей

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда во всякой подобласти Ω области X с гомотопической группой $\pi_{n-1}(\Omega)$ ранга $d(\pi_{n-1}(\Omega)) = s$ при $s \leq r$ относительно изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей голоморфной системы (AD) невозможна ситуация, описанная в лемме 1.1.

Доказательство. Прежде всего отметим следующий факт.

Поскольку голоморфная функция g является знакоопределённой на области X , то имеет место закономерность: если система (AD) в области X имеет компактную регулярную интегральную гиперповерхность, то автономная обыкновенная дифференциальная система, определяющая векторное поле (6), имеет ту же компактную регулярную интегральную гиперповерхность.

Допустим противное: описанная в лемме 1.1 ситуация относительно изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей $\partial\Sigma_1, \dots, \partial\Sigma_{s+1}$ системы (AD) имеет место.

Так как $\partial\Sigma_{s+1}$ — изолированная компактная регулярная интегральная гиперповерхность дифференциальной системы (AD), то снаружи при $t \rightarrow +\infty$ траектории системы (AD) стремятся к $\partial\Sigma_{s+1}$ (удаляются от $\partial\Sigma_{s+1}$) и существует такая гиперповерхность $\partial\Xi$, диффеоморфная гиперповерхности $\partial\Sigma_{s+1}$, что через неё траектории входят в область (выходят из области), ограниченную гиперповерхностями $\partial\Xi$ и $\partial\Sigma_{s+1}$. Поэтому

$$\int_{\partial\Xi} g(x)f(x) \cdot \vec{n}(x) dS + \sum_{\tau=1}^s \int_{\partial\Sigma_{\tau}} g(x)f(x) \cdot \vec{n}(x) dS \neq 0,$$

где \vec{n} — внешнее нормальное единичное поле.

Но, с другой стороны, в силу соленоидальности на области \mathcal{X} векторного поля (6) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Xi} g(x)f(x) \cdot \vec{n}(x) dS + \sum_{\tau=1}^s \int_{\partial\Sigma_{\tau}} g(x)f(x) \cdot \vec{n}(x) dS = \\ = \int_{\Xi} \operatorname{div} (g(x)f(x)) d\Xi = 0, \end{aligned}$$

где область Ξ ограничена гиперповерхностью $\partial\Xi \cup \left(\bigcup_{\tau=1}^s \partial\Sigma_{\tau} \right)$.

Полученное противоречие и доказывает лемму 1. ■

Из теорем 1 (при $\varphi(x) = 1, \forall x \in \mathcal{X}$) и 3 получаем

Следствие 1. *Линейная автономная обыкновенная дифференциальная система не имеет изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

4. Автономная система уравнений в полных дифференциалах

Признаки ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей.

Автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n -го порядка (ADj), $j = \overline{1, m}$.

Непрерывно дифференцируемая на области \mathcal{X} скалярная функция векторного аргумента $w: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ является автономным частным интегралом системы (ACD) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{x}_j(x)w(x) = \Phi_j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где функции $\Phi_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, таковы, что

$$\Phi_j(x)|_{w(x)=0} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Выполнение k -го тождества системы (1) при условии (2), когда $j = k$, равносильна наличию автономного частного интеграла $w: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ у системы (AD k).

Это позволяет сделать следующие выводы.

Теорема 1 (первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений в полных дифференциалах). Пусть существует номер $j \in \{1, \dots, m\}$ такой, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD j) выполняются условия теоремы 1.2D. Тогда в области \mathcal{X} голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Теорема 2. Пусть существует номер $j \in \{1, \dots, m\}$ такой, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD j) выполняются условия теоремы 2.2D. Тогда:

1) в области \mathcal{X} голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей;

2) всякое множество лакун области \mathcal{X} , содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности автономной системы (ACD), имеет нулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$ -формы $d\theta$.

Теорема 3 (второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей системы уравнений в полных дифференциалах). Пусть область \mathcal{X} из \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_{n-1}(\mathcal{X})) = r$, существует такой номер $j \in \{1, \dots, m\}$, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD j) найдётся непрерывно дифференцируемая на \mathcal{X} функция $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что у векторного поля

$$Z_j: x \rightarrow \varphi(x)X^j(x), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

расходимость $\operatorname{div} Z_j$ знакопостоянна на области \mathcal{X} . Тогда в области \mathcal{X} голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах (ACD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Пример 1. Для системы уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_3 \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k) dt_1 + x_2 dt_2, \\ dx_2 &= \left(x_3 + x_2 \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k)(g(x) - 2k - 1) \right) dt_1 + (-x_1 + x_3) dt_2, \\ dx_3 &= \left(-x_2 - x_1 \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k) \right) dt_1 + \\ &+ \left(-x_2 + x_3 \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k)(g(x) - 2k - 1) \right) dt_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция $g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \forall x \in \mathbb{R}^3$, ввиду того, что

$$\begin{aligned} d(g(x) - m)|_{(3)} &= \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k)(g(x) - 2k - 1)(x_2^2 dt_1 + x_3^2 dt_2), \\ \forall (t, x) &\in \mathbb{R}^5, \quad m = \overline{1, 2n+1}, \end{aligned}$$

каждая сфера

$$S_m^2 = \{x: g(x) = m\}, \quad m = \overline{1, 2n+1},$$

является компактной интегральной гиперповерхностью.

На основании автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD1), индуцированной системой уравнений в полных дифференциалах (3), построим уравнение Пфаффа

$$\chi_{12}(x) = 0,$$

где 1-форма

$$\begin{aligned}\chi_{12}(x) = & - \left(x_3 + x_2 \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k)(g(x) - 2k - 1) \right) dx_1 + \\ & + x_3 \prod_{k=0}^n (g(x) - 2k) dx_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Линейная дифференциальная форма

$$\ell(x) = - \prod_{k=0}^n \frac{1}{g(x) - 2k} dx_1, \quad \forall x \in \bigcup_{k=0}^n \mathcal{X}_k,$$

$$\mathcal{X}_\tau = \{x: 2\tau < g(x) < 2(\tau + 1)\}, \quad \mathcal{X}_n = \{x: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 2n\},$$

где $\tau = \overline{0, n-1}$, такова, что внешний дифференциал

$$d(\chi_{12}(x) \wedge \ell(x)) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad \forall x \in \bigcup_{k=0}^n \mathcal{X}_k.$$

Следовательно, по теореме 1, в каждой из областей \mathcal{X}_k , $k = \overline{0, n}$, с гомотопическими группами $\pi_2(\mathcal{X}_k)$ ранга $d(\pi_2(\mathcal{X}_k)) = 1$, $k = \overline{0, n}$, система уравнений в полных дифференциалах (3) может иметь не более одной компактной интегральной гиперповерхности.

В итоге получаем, что система уравнений в полных дифференциалах (3) имеет $2n+1$ компактных интегральных гиперповерхностей, каковы-ми являются ранее указанные сферы S_m^2 , $m = \overline{1, 2n+1}$.

В случае вполне разрешимой системы (IACD) из всего множества её интегральных гиперповерхностей будем выделять регулярные, т.е. такие, на которых нет сингулярных точек этой системы.

Теорема 4 (*признак ограниченности числа изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах*). Пусть область \mathcal{X} из пространства \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(\mathcal{X})$ ранга $d(\pi_{n-1}(\mathcal{X})) = r$, существуют голоморфные знакоопределённые на области \mathcal{X} функции $g_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, такие, что векторные поля

$$Y_j: x \rightarrow g_j(x)X^j(x), \forall x \in X, j = \overline{1, m},$$

являются соленоидальными на X . Тогда в области X вполне разрешимая голоморфная автономная система уравнений в полных дифференциалах (IACD) может иметь не более r изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.

Доказательство базируется на теореме 3.3 и следует из такого вполне очевидного факта: наличие одной и той же изолированной компактной интегральной гиперповерхности у каждой автономной обыкновенной дифференциальной системы (ADj), $j = \overline{1, m}$, влечёт за собой то, что эта гиперповерхность является изолированной интегральной и для системы (ACD). ■

На основании системы тождеств (1) при условиях (2), следствия 1.3, теорем 1 и 4 получаем такую закономерность.

Следствие 1. *Линейная вполне разрешимая автономная система уравнений в полных дифференциалах не имеет изолированных компактных регулярных интегральных гиперповерхностей.*

5. Линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных

Признаки ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей.

Линейная однородная дифференциальная система в частных производных (∂ ACD) индуцирует m автономных обыкновенных дифференциальных систем n -го порядка (ADj), $j = \overline{1, m}$, которые составляют систему характеристик системы (∂ ACD).

Поэтому непрерывно дифференцируемая на области X скалярная функция векторного аргумента $w: X \rightarrow \mathbb{R}$ является частным интегралом (частным решением) системы (∂ ACD) тогда и только тогда, когда имеет место система тождеств (1.4) при условиях (2.4).

Выполнение k -го тождества системы (1.4) при условии (2.4), когда $j = k$, равносильно наличию автономного частного интеграла $w: X \rightarrow \mathbb{R}$ у автономной обыкновенной дифференциальной системы (ADk).

Это позволяет сделать следующие выводы.

Теорема 1 (первый признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей линейной однородной системы уравнений в частных производных). Пусть существует такой номер $j \in \{1, \dots, m\}$, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD_j) выполняются условия теоремы 1.2D. Тогда в области X голоморфная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (∂ACD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Теорема 2. Пусть существует номер $j \in \{1, \dots, m\}$ такой, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD_j) выполняются условия теоремы 2.2D. Тогда:

1) в области X голоморфная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (∂ACD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей;

2) всякое множество лагун области X , содержащихся внутри компактной интегральной гиперповерхности системы (∂ACD) , имеет нулевой суммарный индекс относительно $(n-1)$ -формы $d\theta$.

Теорема 3 (второй признак ограниченности числа компактных интегральных гиперповерхностей линейной однородной системы уравнений в частных производных). Пусть область X из арифметического пространства \mathbb{R}^n имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(X)$ ранга $d(\pi_{n-1}(X)) = r$, существует такой номер $j \in \{1, \dots, m\}$, что для автономной обыкновенной дифференциальной системы (AD_j) найдётся такая непрерывно дифференцируемая на области X функция $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, что у векторного поля

$$Z_j: x \rightarrow \varphi(x)X^j(x), \quad \forall x \in X,$$

расходимость $\operatorname{div} Z_j$ знакопостоянна на области X . Тогда в области X голоморфная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (∂ACD) может иметь не более r компактных интегральных гиперповерхностей.

Пример 1. Для голоморфной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} x_2 g(x) \partial_{x_1} y + (x_3 - x_1 g(x)) \partial_{x_2} y + (-x_1 - x_2 + x_1 g(x)) \partial_{x_3} y &= 0, \\ (-x_2 + x_3 + x_2 g(x)) \partial_{x_1} y + (x_1 - x_1 g(x)) \partial_{x_2} y + (-x_1 - x_2 + x_2 g(x)) \partial_{x_3} y &= 0, \end{aligned}$$

где скалярная функция

$$g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

сфера

$$S^2 = \{x: g(x) = 1\}$$

является компактной интегральной поверхностью.

Рассмотрим автономную обыкновенную дифференциальную систему (AD1), индуцированную данной системой.

На основании этой системы составляем уравнение Пфаффа

$$\chi_{13}(x) = 0,$$

где

$$\chi_{13}(x) = x_2 g(x) dx_3 - (-x_1 - x_2 + x_1 g(x)) dx_1, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Непрерывно дифференцируемая на области $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ линейная дифференциальная форма

$$\ell(x) = \frac{1}{g(x)} dx_1, \forall x \in \mathcal{X}_0,$$

такова, что внешний дифференциал внешнего произведения

$$d(\chi_{13}(x) \wedge \ell(x)) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \forall x \in \mathcal{X}_0.$$

Поэтому в соответствии с теоремой 1 в области \mathcal{X}_0 с гомотопической группой $\pi_2(\mathcal{X}_0)$ ранга $d(\pi_2(\mathcal{X}_0)) = 1$ линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных может иметь не более одной компактной интегральной поверхности.

Таковой является ранее указанная сфера S^2 .

Пример 2. Для голоморфной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
& (-x_1 + x_2 + x_1 g(x)) \partial_{x_1} y + (-x_1 - x_2 + x_2 g(x)) \partial_{x_2} y + \\
& + (-x_3 + x_3 g(x)) \partial_{x_3} y = 0, \\
& (-x_2 + x_3 + x_2 g(x)) \partial_{x_1} y + (x_1 - x_1 g(x)) \partial_{x_2} y + \\
& + (-x_1 - x_2 + x_2 g(x)) \partial_{x_3} y = 0,
\end{aligned}$$

где скалярная функция

$$g: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

сфера

$$S^2 = \{x: g(x) = 1\}$$

является компактной интегральной поверхностью.

Рассмотрим автономную обыкновенную дифференциальную систему (AD1), индуцированную данной системой.

Пусть

$$\varphi: x \rightarrow \frac{1}{g^{\frac{5}{2}}(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Тогда для векторного поля

$$Z_1: x \rightarrow \varphi(x) X^1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

расходимость $\operatorname{div} Z_1$ знакоположительна на области $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Учитывая, что ранг

$$d(\pi_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})) = 1,$$

по теореме 3 заключаем, что выделенная сфера S^2 является единственной компактной интегральной поверхностью данной линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных, расположенной в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

§ 3. Алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах

В монографии [93] В.И. Мироненко разработана методика исследования обыкновенных дифференциальных систем, для каждого решения которых одна или несколько составляющих являются решениями линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами.

Такие системы были названы вложимыми.

Дифференциальные системы, для каждого решения которых одна или несколько составляющих являются решениями алгебраических дифференциальных систем с постоянными коэффициентами, естественно отнести к *алгебраически вложимым*.

Многие задачи, решённые для вложимых обыкновенных дифференциальных систем, в своей основе разрешаются и в случае алгебраической вложимости. Особо суть алгебраической вложимости выкристаллизовывается в многомерном случае, когда переходим от рассмотрения обыкновенных дифференциальных систем к системам уравнений в полных дифференциалах.

1. Алгебраическая вложимость

Дифференциальные операторы, алгебраически независимые в силу системы уравнений в полных дифференциалах. Достаточные условия расположения орбит на алгебраическом многообразии. q -алгебраически и p -сильно q -алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах. Алгебраические многообразия, на которых расположены орбиты алгебраически вложимых систем уравнений в полных дифференциалах.

Рассмотрим автономную вполне разрешимую систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = R(x) dt, \quad (1)$$

когда элементами матрицы $R(x) = \|R_{ij}(x)\|$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, размера $n \times m$ являются рациональные функции $R_{ij}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, относительно x над полем \mathbb{R} , считая $m < n$.

На основании системы (1) построим функции

$$\begin{aligned} S_{i0\dots 0}^{(0)} : x \rightarrow x_i, \quad S_{i10\dots 0}^{(1)} : x \rightarrow R_{i1}(x), \\ S_{i010\dots 0}^{(1)} : x \rightarrow R_{i2}(x), \dots, S_{i0\dots 01}^{(1)} : x \rightarrow R_{im}(x), \quad (2) \\ S_{i20\dots 0}^{(2)} : x \rightarrow \sum_{\tau=1}^n R_{\tau 1}(x) \partial_{x_\tau} R_{i1}(x), \dots, \forall x \in \mathcal{X}, i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Пусть

$$x : t \rightarrow x(t), \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

есть решение на области \mathcal{T} из пространства \mathbb{R}^m системы (1).

Тогда

$$\partial^{\nu_{ilk\xi}} x(t) = S_{i\nu_{ilk\xi}}^{(\beta_{ilk\xi})}(x(t)), \quad \forall t \in \mathcal{T}, i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где

$$\partial^{\nu_{ilk\xi}} = \partial_{t_1}^{\nu_{1ilk\xi}} \partial_{t_2}^{\nu_{2ilk\xi}} \dots \partial_{t_m}^{\nu_{milk\xi}}$$

есть оператор дифференцирования по переменным t_j соответственно порядков $\nu_{jilk\xi}$, $\nu_{ilk\xi} = (\nu_{1ilk\xi}, \dots, \nu_{milk\xi})$, числа $\beta_{ilk\xi}$ и $\nu_{jilk\xi}$ — целые неотрицательные, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, r_{k\xi}}$, $k = \overline{0, s_\xi}$, $\xi = \overline{1, q}$.

Введём дифференциальные операторы

$$\mathfrak{L}_\xi(t) = \sum_{k=0}^{s_\xi} a_{k\xi} \prod_{l=1}^{r_{k\xi}} \prod_{i \in I} \left(\partial^{\nu_{ilk\xi}} \right)^{\mu_{ilk\xi}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^m, \xi = \overline{1, q}, \quad (4)$$

с постоянными коэффициентами $a_{k\xi}$ из поля \mathbb{R} , где $\mu_{ilk\xi}$ — целые неотрицательные числа, $i \in I$, $I = \{i_1, \dots, i_q\} \subset \{1, \dots, n\}$, $l = \overline{1, r_{k\xi}}$, $k = \overline{0, s_\xi}$, $\xi = \overline{1, q}$.

Будем говорить, что дифференциальные операторы \mathfrak{L}_ξ , $\xi = \overline{1, q}$, алгебраически независимы на области \mathcal{T} в силу системы (1), если функции

$$L_\xi: x \rightarrow \sum_{k=0}^{s_\xi} a_{k\xi} \prod_{l=1}^{r_{k\xi}} \prod_{i \in I} \left(S_{i\nu_{ilk\xi}}^{(\beta_{ilk\xi})}(x) \right)^{\mu_{ilk\xi}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \xi = \overline{1, q}, \quad (5)$$

являются алгебраически независимыми¹ на области \mathcal{X} .

Теорема 1. Пусть y автономной вполне разрешимой системы (1) существуют решения:

1) $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, такое, что векторная функция векторного аргумента

$$u: t \rightarrow (\varphi_{i_1}(t), \dots, \varphi_{i_q}(t)), \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (6)$$

у которой координаты суть составляющие $x_i: t \rightarrow \varphi_i(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, $i \in I$, решения $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, является первым интегралом алгебраической системы уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}_\xi(t)u = 0, \quad \xi = \overline{1, q}, \quad (7)$$

построенной на основании алгебраически независимых на области \mathcal{T} в силу системы (1) дифференциальных операторов (4);

2) $x: t \rightarrow \psi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, такое, что векторная функция векторного аргумента

¹Под алгебраической зависимостью на области \mathcal{X} пространства \mathbb{R}^n скалярных функций

$$f_\tau: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau = \overline{1, p},$$

будем понимать существование такого полинома $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, с коэффициентами из \mathbb{R} , что

$$P(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

В противном случае функции f_τ , $\tau = \overline{1, p}$, будем называть алгебраически независимыми на области \mathcal{X} .

$$u: t \rightarrow (\psi_{i_1}(t), \dots, \psi_{i_q}(t)), \forall t \in \mathcal{T}, \quad (8)$$

у которой координаты суть составляющие $x_i: t \rightarrow \psi_i(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, $i \in I$, решения $x: t \rightarrow \psi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, не является первым интегралом дифференциальной системы (7).

Тогда орбита системы (1), соответствующая решению $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, расположена на построенном с помощью функций (2) и (5) алгебраическом многообразии

$$\{x: L_\xi(x) = 0, \xi = \overline{1, q}\}. \quad (9)$$

Доказательство. Вдоль любого решения $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, вполне разрешимой системы (1) функции (2) с производными этого решения связаны тождествами (3).

Поэтому для решения $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, системы (1), удовлетворяющего условию 1) доказываемой теоремы, имеет место система тождеств

$$L_\xi(\varphi(t)) = 0, \forall t \in \mathcal{T}, \xi = \overline{1, q}. \quad (10)$$

При этом согласно условию 2) система тождеств (10) выполняется не для всех решений $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, системы (1).

Поэтому орбита дифференциальной системы (1), соответствующая решению $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, расположена на алгебраическом многообразии (9).

Это обосновано тем, что в противном случае имеют место тождества

$$L_\xi(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}, \xi = \overline{1, q}, \quad (11)$$

что противоречит наличию решения $x: t \rightarrow \psi(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, у системы (1) со свойством, предусмотренным условием 2). ■

Пример 1. Вполне разрешимая система [1, с. 48]

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dt_1 - 2x_1x_2 dt_2, \\ dx_2 &= -2x_1x_2 dt_1 + (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) dt_2, \\ dx_3 &= -2x_1x_3 dt_1 - 2x_2x_3 dt_2 \end{aligned} \quad (12)$$

такова, что у каждого из её решений

$$x_1: (t_1, t_2) \rightarrow \frac{t_1}{t_1^2 + t_2^2 + C^2}, \quad x_2: (t_1, t_2) \rightarrow \frac{t_2}{t_1^2 + t_2^2 + C^2},$$

$$x_3: (t_1, t_2) \rightarrow \frac{C}{t_1^2 + t_2^2 + C^2}, \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathcal{T},$$

где $\mathcal{T} \subset \{(t_1, t_2): t_1^2 + t_2^2 + C^2 \neq 0\}$, компонента x_3 является решением алгебраического уравнения в частных производных

$$uu_{t_1 t_1} - 2u_{t_1}^2 + \frac{2}{C} u^3 = 0.$$

Согласно теореме 1 соответствующая каждому из этих решений при $C \neq 0$ орбита дифференциальной системы (12) расположена на алгебраическом многообразии

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3): x_3^2 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{x_3}{C} \right) = 0 \right\},$$

что устанавливаем вычислениями с учётом того, что

$$u = x_3, \quad u_{t_1} = -2x_1 x_3, \quad u_{t_1 t_1} = 2x_3(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Достаточные условия того, что орбиты системы (1) расположены на алгебраическом многообразии, могут быть получены на основании понятия алгебраической вложимости.

Определение 1. Автономную вполне разрешимую систему уравнений в полных дифференциалах (1) назовём **q -алгебраически вложимой**, $q \leq n$, если соответственно для каждого решения $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}$, этой системы можно указать алгебраическую систему уравнений в частных производных (7), построенную на основании алгебраически независимых на области \mathcal{T} в силу системы (1) дифференциальных операторов (4), первым интегралом которой будет векторная функция векторного аргумента

$$u: t \rightarrow (x_{i_1}(t), \dots, x_{i_q}(t)), \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

с координатными функциями x_i , $i \in I$, являющимися составляющими решения x .

Определение 2. Автономную вполне разрешимую систему уравнений в полных дифференциалах (1) назовём ***р-сильно q-алгебраически вложимой***, $0 \leq p \leq q \leq n$, если она является *q-алгебраически вложимой* и для всех её решений $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in T$, можно указать одну алгебраическую систему *p* уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}_{\xi_\theta}(t)u = 0, \quad \theta = \overline{1, p}, \quad (1 \leq \xi_\theta \leq q, \quad \theta = \overline{1, p}),$$

первыми интегралами которой будут векторные функции векторного аргумента

$$u: t \rightarrow (x_{i_1}(t), \dots, x_{i_q}(t)), \quad \forall t \in T,$$

с координатными функциями x_i , $i \in I$, являющимися составляющими решений x .

Теорема 2. Если автономная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (1) *р-сильно q-алгебраически вложима*, $0 \leq p \leq q - 1$, то её орбиты расположены на алгебраических многообразиях.

Действительно, в соответствии с определением 1 для каждого решения $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in T$, системы (1) существуют числа

$$a_{k\xi} \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \nu_{jilk\xi} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mu_{ilk\xi} \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$k = \overline{0, s_\xi}, \quad \xi = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i \in I, \quad l = \overline{1, r_{k\xi}},$$

такие, что

$$L_\xi(x(t)) = 0, \quad \forall t \in T, \quad \xi = \overline{1, q}. \quad (13)$$

Если хотя бы одно из тождеств (13) не является общим тождеством для всех решений $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in T$, дифференциальной системы (1), то орбита системы (1) расположена на алгебраическом многообразии

$$\{x: L_\xi(x) = 0, \quad \xi \in \{1, \dots, q\}\}. \quad (14)$$

Это обосновано тем, что в противном случае все равенства $L_\xi(x) = 0$, $\xi = \overline{1, q}$, на области X обращаются в тождества (11), что соответствует q -сильной q -алгебраической вложимости системы (1). ■

Доказательство теоремы 2 является и доказательством следующей закономерности.

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

1) система (1) p -сильно q -алгебраически ($0 \leq p \leq q - 1$) вложима по компонентам x_i , $i \in I$;

2) существует такое решение $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in T$, системы (1), что вектор-функция (6), у которой координаты суть составляющие $x_i: t \rightarrow \varphi_i(t)$, $\forall t \in T$, $i \in I$, решения $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in T$, является первым интегралом системы уравнений в частных производных (7);

3) существует такое решение $x: t \rightarrow \psi(t)$, $\forall t \in T$, системы (1), что вектор-функция (8), у которой координаты суть составляющие $x_i: t \rightarrow \psi_i(t)$, $\forall t \in T$, $i \in I$, решения $x: t \rightarrow \psi(t)$, $\forall t \in T$, не является первым интегралом системы уравнений в частных производных (7).

Тогда соответствующая решению $x: t \rightarrow \varphi(t)$, $\forall t \in T$, орбита системы (1) расположена на алгебраическом многообразии (14), построенном с помощью функций (2) и (5).

Методом, аналогичным использованному при доказательстве теорем 1, 2 и 3, для не являющихся p -сильно q -алгебраически вложимыми систем (1) устанавливаем следующее свойство.

Теорема 4. Пусть автономная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (1) не является p -сильно q -алгебраически вложимой, $0 \leq p \leq q$, по компонентам x_i , $i \in I$, и пусть существует решение $x: t \rightarrow x(t)$, $\forall t \in T$, системы (1) такое, что вектор-функция

$$u: t \rightarrow (x_{i_1}(t), \dots, x_{i_q}(t)), \quad \forall t \in T,$$

координаты которой суть составляющие x_i , $i \in I$, решения x , будет первым интегралом системы (7). Тогда орбита системы (1), соответствующая решению x , расположена на алгебраическом многообразии (14), построенном с помощью функций (2) и (5).

2. Компактные регулярные орбиты алгебраически вложимых систем

Алгебраически вложимые системы, не имеющие изолированных компактных регулярных орбит. Алгебраически вложимые обыкновенные дифференциальные системы второго и третьего порядков, у которых состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями являются центром.

Теорема 1. *Если дифференциальная система (1.1) является 0-сильно $(n - m)$ -алгебраически вложимой, то у неё нет изолированных компактных регулярных орбит.*

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы у системы (1.1) имеется изолированная компактная регулярная орбита.

Регулярность орбиты означает, что она представляет собой m -мерное регулярное интегральное многообразие. В силу изолированности орбита будет предельной для некоторого семейства m -мерных интегральных многообразий.

Если теперь провести прямую, которая не лежит в касательном пространстве в точке её пересечения с изолированной компактной регулярной орбитой, то будет существовать m -мерное интегральное многообразие из ранее указанного семейства, которое пересечёт прямую по крайней мере счётное число раз.

Однако, по теореме 2.1, каждая орбита системы (1.1) алгебраическая, и такая ситуация невозможна. ■

Следствие 1. *Если система (1.1) при $m = 1$, является 0-сильно $(n - 1)$ -алгебраически вложимой, то у неё нет предельных циклов.*

Теорема 2. *Если система (1.1) при $m = 1$, $n = 3$ имеет изолированное состояние равновесия с одним вещественным ненулевым и двумя чисто мнимыми характеристическими корнями, при этом она является 0-сильно 2-алгебраически вложимой, то это её состояние равновесия будет центром.*

Доказательство. Пусть изолированное состояние равновесия с одним вещественным ненулевым и двумя чисто мнимыми характеристическими корнями системы (1.1) при $m = 1$ и $n = 3$ является центром.

Тогда существует интегральная поверхность, проходящая через это состояние равновесия, и траектория, расположенная на интегральной поверхности, которая будет пересекать по крайней мере счётное число раз всякую гладкую кривую, проходящую через состояние равновесия и расположенную на интегральной поверхности.

Однако, по теореме 2.1, каждая траектория 0-сильно 2-алгебраически вложимой системы (1.1) при $m = 1$, $n = 2$ является алгебраической, и такая ситуация невозможна. ■

Теорема 3. *Если система (1.1) при $m = 1$, $n = 2$ является 0-сильно 1-алгебраически вложимой и имеет изолированное состояние равновесия с двумя чисто мнимыми характеристическими корнями, то это её состояние равновесия представляет собой центр.*

Доказательство основано на том, что по теореме 2.1 все траектории 0-сильно 1-алгебраически вложимой системы (1.1) при $m = 1$, $n = 2$ алгебраические, а поэтому состояние равновесия фокусом быть не может. ■

Обратим внимание на то, что если система (1.1) является p -сильно $(n - m)$ -алгебраически вложимой и $p > 0$, то утверждения теорем 1 – 3 и следствия 1 могут не иметь места.

Отразим это в примерах.

Пример 1. Автономная обыкновенная дифференциальная система

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2 - x_1^3, & \frac{dx_2}{dt} &= -x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3(1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) \end{aligned} \quad (1)$$

2-сильно 2-алгебраически вложима по компонентам x_1 и x_2 в алгебраическую обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1^2 \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0.$$

Взяв производную в силу системы (1) от функции

$$F: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_3, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

согласно [115] получаем, что траектории, соответствующие всем воз-

можным периодическим решениям дифференциальной системы (1), должны быть расположены на её интегральной плоскости $x_3 = 0$.

При $x_3 = 0$ система (1) будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_1^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1.$$

Эта система имеет один предельный цикл [122, с. 174 – 179].

Поэтому и система (1) также имеет один предельный цикл.

Пример 2. Автономная обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3 \quad (2)$$

1-сильно 1-алгебраически вложима по компоненте x_2 в алгебраическое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 3x_2^2 + x_2 = 0.$$

Состояние равновесия $O(0, 0)$ дифференциальной системы (2) имеет чисто мнимые характеристические корни $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$.

Взяв производную в силу системы (2) от функции

$$F: (x_1, x_2) \rightarrow x_1^2 + x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

в соответствии с теоремой 7.5.3 из [10, с. 247] приходим к выводу, что состояние равновесия O дифференциальной системы (2) является устойчивым фокусом.

Пример 3. Автономная обыкновенная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_3(1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2) \quad (3)$$

2-сильно 2-алгебраически вложима по компонентам x_1 и x_2 в алгебраическую обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^3 - x_1 = 0, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 3x_2^2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0.$$

Состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ системы (3) имеет один отрицательный $\lambda_1 = -1$ и пару чисто мнимых $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ характеристических корней.

Взяв производную в силу системы (3) от функции

$$F: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_3, \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

согласно [115] получаем, что траектории, соответствующие всем возможным периодическим решениям дифференциальной системы (3), должны быть расположены на её интегральной плоскости $x_3 = 0$.

При $x_3 = 0$ дифференциальная система (3) примет вид (2).

В предыдущем примере доказано, что система (2) не имеет периодических решений, а её состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$ с чисто мнимыми характеристическими корнями является устойчивым фокусом.

Стало быть, и состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ обыкновенной дифференциальной системы (3) — устойчивый фокус.

3. Выпрямляемость алгебраически вложимых систем

Область выпрямляемости алгебраически вложимых систем.

На основании вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) составим m обыкновенных дифференциальных систем

$$dx = R^j(x) dt_j, \quad (1j)$$

где векторы-функции $R^j(x) = \text{colon}(R_{1j}(x), \dots, R_{nj}(x))$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, каждый из которых определяет линейный дифференциальный оператор

$$\mathfrak{R}_j(x) = R^j(x)\partial, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \partial = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Пусть система (1j) q -сильно q -алгебраически вложима в обыкновенную дифференциальную систему, разрешённую относительно старших производных,

$$\frac{d^{r_j} x_i}{dt_j^{r_j}} = Q_{ij} \left(x_1, \dots, x_q, \frac{dx_1}{dt_j}, \dots, \frac{d^{r_j-1} x_q}{dt_j^{r_j-1}} \right), \quad j = \overline{1, q}, \quad (2j)$$

где Q_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, q}$) — полиномы своих аргументов с вещественными коэффициентами.

Система (2j) выпрямляема на области Ω вещественного арифметического пространства размерности qr_j .

Тогда существует такая однозначная непрерывно дифференцируемая на области Ω векторная функция векторного аргумента $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{qr_j}$, что производная в силу дифференциальной системы (2j) равна

$$\frac{d^{r_j}}{dt^{r_j}} U(y)|_{(1j)} = (1, \dots, 1), \forall y \in \Omega.$$

Учитывая (2.1), приходим к выводу:

$$\mathfrak{R}_j(x)\Lambda(x) = (1, \dots, 1), \forall x \in \Xi,$$

где $\Lambda: \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть функция, полученная посредством замены (2.1) из функции $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{qr_j}$, Ξ — прообраз области Ω при этом отображении.

Поэтому (см. теорему 16.1 из [16, с. 139]) имеет место

Теорема 1. Пусть обыкновенная дифференциальная система (1j) q -сильно q -алгебраически вложима в систему дифференциальных уравнений (2j), а система (2j) выпрямляема на области Ω из пространства \mathbb{R}^{qr_j} . Тогда дифференциальная система (1j) выпрямляема на области \mathcal{X} .

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и система (2j) не имеет первых интегралов

$$F_\tau: x \rightarrow \mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x), \tau = \overline{1, m}, \tau \neq j,$$

а

$$\mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x) \neq 0, \forall x \in \Xi, \tau = \overline{1, m}, \tau \neq j.$$

Тогда система (1.1) выпрямляема на области Ξ .

В самом деле, вполне разрешимая система (1.1) удовлетворяет условиям Фробениуса:

$$[\mathfrak{R}_k(x), \mathfrak{R}_l(x)] = \mathfrak{O}, \forall x \in \mathcal{X}, k, l = \overline{1, m}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R}_j(x)\mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x) = 0, \forall x \in \Xi, j, \tau = \overline{1, m}, j \neq \tau.$$

Поэтому отсутствие у системы (2j) указанных первых интегралов означает, что

$$\mathfrak{R}_\tau(x)\Lambda(x) = s_\tau, \forall x \in \Xi, s_\tau = \text{const}, \tau = \overline{1, m}, j \neq \tau.$$

Отсюда при $s_\tau \neq 0, \tau = \overline{1, m}, j \neq \tau$, следует выпрямляемость системы (1.1) на области Ξ . ■

4. Интегралы алгебраически вложимых систем

Построение первого интеграла алгебраически вложимой системы по первому интегралу обыкновенной дифференциальной системы, в которую производится вложение.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

- 1) обыкновенная дифференциальная система (1j.3) q -сильно q -алгебраически вложима в обыкновенную дифференциальную систему (2j.3);
- 2) скалярная функция

$$L: (t_j, x) \rightarrow F(x) \exp(s_j t_j), \forall (t_j, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

является первым интегралом системы (2j.3).

Тогда автономная вполне разрешимая система (1.1) имеет первый интеграл

$$M: (t, x) \rightarrow \Phi(x) \exp(s_j t_j), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \Xi,$$

где функция $\Phi: \Xi \rightarrow \mathbb{R}, \Xi \subset \mathbb{X}$, получена с помощью замены (2.1) из функции $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^{qr_j}$.

Доказательство. Ввиду того, что функция L является первым интегралом системы (2j.3), имеет место тождество

$$\frac{d^{r_j}}{dt^{r_j}} F(x)|_{(2j.3)} = -s_j, \forall x \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^{qr_j}, s_j = \text{const}.$$

Учитывая (2.1), получаем, что

$$\mathfrak{R}_j(x)\Phi(x) = -s_j, \forall x \in \Xi, \Xi \subset \mathcal{X},$$

где $\Phi: \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ есть функция, полученная из $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ посредством замены (2.1), Ξ — прообраз области Ω при этом отображении.

Последнее тождество означает, что функция M является первым интегралом системы (1.1). ■

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

1) обыкновенная дифференциальная система (1j.3) q -сильно q -алгебраически вложима в обыкновенную дифференциальную систему (2j.3);

2) скалярная функция

$$L: (t_j, x) \rightarrow F(x) \exp(s_j t_j), \forall (t_j, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

является первым интегралом системы (2j.3);

3) скалярные функции

$$N_\tau: x \rightarrow \mathfrak{R}_\tau(x)\Phi(x), \tau = \overline{1, m}, \tau \neq j,$$

где функция $\Phi: \Xi \rightarrow \mathbb{R}, \Xi \subset \mathcal{X}$, получена из скалярной функции $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью замены (2.1), не являются первыми интегралами дифференциальной системы (1j.3).

Тогда автономная вполне разрешимая система (1.1) имеет первый интеграл

$$M: (t, x) \rightarrow \Phi(x) \exp \sum_{j=1}^m s_j t_j, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \Xi,$$

где $s_j = -\mathfrak{R}_j(x)\Phi(x), \forall x \in \Xi, j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Из условий Фробениуса

$$[\mathfrak{R}_k(x), \mathfrak{R}_l(x)] = \mathfrak{O}, \forall x \in \mathcal{X}, k, l = \overline{1, m}.$$

следует, что

$$\mathfrak{R}_j(x)\mathfrak{R}_\tau(x)\Phi(x) = 0, \forall x \in \Xi, \Xi \subset \mathcal{X}, \tau = \overline{1, m}, \tau \neq j.$$

Поэтому отсутствие у системы (1j.3) указанных первых интегралов означает, что

$$\mathfrak{R}_\tau(x)\Phi(x) = -s_\tau, \quad \forall x \in \Xi, \quad s_\tau = \text{const}, \quad \tau = \overline{1, m}.$$

Отсюда следует, что M является первым интегралом дифференциальной системы (1.1). ■

5. Об одном преобразовании

Необходимое условие существования невырожденного преобразования, сохраняющего рациональность правых частей системы уравнений в полных дифференциалах по новым переменным.

При решении некоторых вопросов алгебраической вложимости может быть полезен следующий подход [92].

Поставим задачу о нахождении условий необходимых для существования невырожденного преобразования

$$y_\tau = x_\tau, \quad \tau = \overline{1, q}, \quad y_\theta = y_\theta(x_{q+1}, \dots, x_n), \quad \theta = \overline{q+1, n}, \quad (1)$$

переводящего систему (1.1) в систему

$$dy = T(y) dt, \quad (2)$$

у которой элементы T_{ij} матрицы $T = \|T_{ij}\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, суть рациональные функции по y .

Предположим, что преобразование (1) существует.

Тогда имеет место система тождеств

$$\frac{Dy(x)}{Dx} R(x) = T(y(x)), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3)$$

первые q тождеств которой не содержат производных от y .

Поэтому если существует преобразование вида (1), переводящее систему (1.1) в систему (2), то оно должно удовлетворять системе из q первых тождеств системы (3).

Пример 1. Для существования преобразования

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = y_2(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2,$$

переводящего дифференциальную систему

$$\frac{dx_1}{dt} = -1 - x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_2^2 - 2x_2^4,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^3$$

в систему

$$\frac{dy_1}{dt} = -1 - y_2 - y_1^2 - 3y_1y_2 - 2y_2^2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 + y_1y_2 + y_2^2,$$

необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} & -1 - x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_2^2 - 2x_2^4 = \\ & = -1 - y_2(x_1, x_2) - x_1^2 - 3x_1y_2(x_1, x_2) - 2y_2^2(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$y_2(x_1, x_2) = x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X},$$

ибо якобиан преобразования

$$\frac{D(x_1, x_2^2)}{D(x_1, x_2)} = 2x_2$$

и отличен от нуля на

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что этим преобразованием осуществляется требуемый переход.

§ 4. Компактные регулярные слоения коразмерности один автономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах

1. Изолированные компактные регулярные орбиты

В этом пункте систему (IAPCD) будем рассматривать, когда $m = n - 1$ и у матрицы $P \in \mathbb{M}^{n, n-1}$ ранг

$$\text{rank } P(x) = n - 1$$

почти везде на \mathbb{R}^n .

Для системы (IAPCD) классов \mathfrak{A} и \mathfrak{B} введём вспомогательную функцию

$$X: x \rightarrow \prod_{k=1}^{s+r} w_k(x) \prod_{\tau=1}^{s+r} (\text{Re}^2 \mathfrak{w}_\tau(x) + \text{Im}^2 \mathfrak{w}_\tau(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

На основании теорем 2.2.3.2, 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 1. Пусть алгебраическое многообразие

$$X(x) = 0 \tag{1}$$

делит фазовое пространство \mathbb{R}^n на конечное число χ линейно связных областей \mathcal{X}_τ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(\mathcal{X}_\tau)$ ранга $d(\mathcal{X}_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 2.2.3.2 система (IAPCD \mathfrak{A}) не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии (1).

На основании следствия 4.3.3.2 и теоремы 3.3.2 имеем

Теорема 2. Пусть алгебраическое многообразие (1) делит фазовое пространство \mathbb{R}^n на конечное число χ ли-

нейно связных областей X_τ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(X_\tau)$ ранга $d(X_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно. Тогда при выполнении условий следствия 4.3.3.2 система (IAPCD \mathfrak{A}) не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии (1).

На основании следствия 7.3.3.2, теорем 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 3. Пусть алгебраическое многообразие (1) делит фазовое пространство \mathbb{R}^n на конечное число χ линейно связных областей X_τ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(X_\tau)$ ранга $d(X_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно. Тогда при выполнении условий следствия 7.3.3.2 система (IAPCD \mathfrak{A}) не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии (1).

На основании следствия 1.4.3.2, теорем 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 4. Пусть алгебраическое многообразие (1) делит фазовое пространство \mathbb{R}^n на конечное число χ линейно связных областей X_τ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(X_\tau)$ ранга $d(X_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно. Тогда при выполнении условий следствия 1.4.3.2 система (IAPCD \mathfrak{A}) не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии (1).

На основании следствия 3.4.3.2 и теоремы 3.3.2 получаем

Теорема 5. Пусть алгебраическое многообразие (1) делит фазовое пространство \mathbb{R}^n на конечное число χ линейно связных областей X_τ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(X_\tau)$ ранга $d(X_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно. Тогда при выполнении условий следствия 3.4.3.2 система (IAPCD \mathfrak{A}) не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ изолированных компактных регулярных орбит, не расположенных на многообразии (1).

На основании следствия 6.4.3.2, теорем 1.3.2 и 3.3.2 получаем

Теорема 6. Пусть алгебраическое многообразие (1) делит фазовое пространство \mathbb{R}^n на конечное число χ линейно связных областей X_τ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(X_\tau)$ ранга $d(X_\tau) = r_\tau$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно. Тогда при выполнении условий следствия 6.4.3.2 система (IAPCD \mathfrak{A})

не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ изолированных компактных

регулярных орбит, не расположенных на многообразии (1).

Рассмотрим систему (IAPCD) в случае $n = 2$, $m = 1$, то есть, когда она является автономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой (APD) второго порядка.

В этом случае изолированные компактные регулярные орбиты являются предельными циклами.

На основании теорем 1, 2 и 4 соответственно получаем

Теорема 7. Пусть алгебраическая кривая (1) делит фазовую плоскость \mathbb{R}^2 на конечное число χ линейно связных областей X_τ связности $r_\tau + 1$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно.

Тогда при $\mathfrak{c} = \frac{p(p+1)}{2} - 1$, когда определитель $\Delta \neq 0$, си-

стема (APD) второго порядка не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ предельных циклов, не расположенных на кривой (1).

Теорема 8. Пусть алгебраическая кривая (1) делит фазовую плоскость \mathbb{R}^2 на конечное число χ линейно связных областей X_τ связности $r_\tau + 1$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно.

Тогда при $\mathfrak{c} = \frac{p(p+1)}{2}$, когда определитель $\Lambda \neq 0$, система

(APD) второго порядка не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_\tau$ предельных циклов, не расположенных на кривой (1).

Теорема 9. Пусть алгебраическая кривая (1) делит фазовую плоскость \mathbb{R}^2 на конечное число χ линейно связных областей X_τ связности $r_\tau + 1$, $\tau = \overline{1, \chi}$, соответственно.

Тогда при $\mathfrak{c} + \mathfrak{e} = \frac{p(p+1)}{2}$, когда определитель $\tilde{\Lambda} \neq 0$ и выполняются условия (8.4.3.2), система (APD) второго порядка не может иметь более $\sum_{\tau=1}^{\chi} r_{\tau}$ предельных циклов, не расположенных на кривой (1).

2. Регулярные центры

В этом пункте систему (IAPCD) будем рассматривать, когда $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, и у матрицы $P \in \mathbb{M}^{n, n-1}$ ранг

$$\text{rank } P(x) = n - 1$$

почти везде на \mathbb{R}^n .

Определение 1. *Изолированную особую точку A системы (IAPCD) назовём **регулярным центром**, если орбита, проходящая через всякую точку из любой сколь угодно малой ε -окрестности особой точки A , является регулярной, диффеоморфной сфере S^{n-1} и охватывает точку A .*

Отметим, что в случае $n = 2$ данное понятие совпадает с понятием центра для двумерной автономной обыкновенной дифференциальной системы.

Пусть система (IAPCD) принадлежит классу \mathfrak{A} , а (APD $_k$) есть индуцированная ею автономная обыкновенная дифференциальная система, число

$$\ell = \binom{n + p_k - 1}{n} - \left\lfloor \frac{p_k + 1}{2} \right\rfloor,$$

где символ $[\]$ означает целую часть числа, $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

На основании скалярной функции

$$F: x \rightarrow X(x) \exp Y(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,$$

составим два тождества

$$\mathfrak{p}_k F(x) = \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2} \right]} \sigma_j x_l^{2j} - \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x) \right) F(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

и

$$\mathfrak{p}_k F(x) = \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2} \right]} \sigma_j x_l^{2j} \right) F(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (2)$$

где $\sigma_j, j = \overline{0, [(p_k-1)/2]}$, есть некоторые вещественные числа, а $x_l, l \in \{1, \dots, n\}$, есть l -я координата точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Тождества (1) и (2) соответственно приводим к видам

$$\Xi_k(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2} \right]} \sigma_j x_l^{2j} - \operatorname{div} \mathfrak{p}_k(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (3)$$

и

$$\Xi_k(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2} \right]} \sigma_j x_l^{2j}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4)$$

Тождество (3) (тождество (4)) распадается на систему линейных уравнений относительно

$$\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \varphi_{lh_{\xi_l} \mathfrak{g}_{\xi_l}}, \psi_{lh_{\xi_l} \mathfrak{g}_{\xi_l}}, \beta_{\nu} \quad \text{и} \quad \sigma_j,$$

которая состоит из двух подсистем.

Первая подсистема получена путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях правых и левых частей тождества (3) (тождества (4)), за исключением коэффициентов при переменных $x_l^{2j}, j = \overline{0, [(p_k-1)/2]}$.

Вторая подсистема — это остальные уравнения, которые являются результатом равенства коэффициентов при переменных x_l^{2j} , $j = \overline{0, [(p_k - 1)/2]}$, правых и левых частей тождества (3) (тождества (4)).

При этом первая подсистема содержит лишь

$$\gamma_k, \eta_{\mathfrak{k}}, \tau_{\mathfrak{k}}, \alpha_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \varphi_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \psi_{lh_{\xi_l} g_{\xi_l}}, \beta_{\nu};$$

а во вторую подсистему входят дополнительно σ_j , причём σ_j содержится лишь в одном уравнении и в разных уравнениях содержатся разные σ_j .

Поэтому σ_j , $j = \overline{0, [(p_k - 1)/2]}$, всегда могут быть выражены через все остальные неизвестные.

Из сказанного вытекает, что исходная система, построенная на основании тождества (3) (тождества (4)), совместна тогда и только тогда, когда совместна её первая подсистема.

Определители первых подсистем для тождеств (3) и (4) совпадают и имеют порядок

$$\binom{n + p_k - 1}{n} - \left\lfloor \frac{p_k + 1}{2} \right\rfloor.$$

Обозначим этот определитель $\overline{\Delta}$.

Если $\overline{\Delta} \neq 0$, то совместна первая подсистема, построенная на основании тождества (3), а при $\overline{\Delta} = 0$ у первой подсистемы, построенной на основании тождеств (4), всегда существует нетривиальное решение.

Если

$$\overline{\Delta} \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{p_k - 1}{2} \right\rfloor} |\sigma_j| \neq 0,$$

то согласно (1) и теореме 1.3.2 особая точка A не может быть регулярным центром дифференциальной системы (IAPCD \mathfrak{A}).

Если

$$\overline{\Delta} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\left[\frac{p_k-1}{2}\right]} |\sigma_j| \neq 0,$$

то согласно тождеству (2) и теореме 2.2.1 особая точка A также не может быть регулярным центром системы (IAPCD \mathfrak{A}).

Если

$$\sigma_j = 0, \quad j = 0, \overline{[(p_k - 1)/2]},$$

то при $\overline{\Delta} \neq 0$ согласно (1) система (APDk) имеет последний множитель (2.3.3.2), а при $\overline{\Delta} = 0$ — первый интеграл (1.3.3.2).

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Если система (IAPCD) принадлежит классу \mathfrak{A} , число*

$$\ell = \binom{n + p_k - 1}{n} - \left\lfloor \frac{p_k + 1}{2} \right\rfloor,$$

то её особая точка A может быть регулярным центром лишь тогда, когда система (APDk) имеет первый интеграл (1.3.3.2) или последний множитель (2.3.3.2).

Осюда можно сделать такой вывод

Предложение 1. *Если у системы (IAPCD \mathfrak{A}) особая точка A при*

$$\ell = \binom{n + p_k - 1}{n} - \left\lfloor \frac{p_k + 1}{2} \right\rfloor$$

является регулярным центром, то система дифференциальная (APDk) имеет либо первый интеграл (1.3.3.2), либо последний множитель (2.3.3.2).

Аналогично на основании предложения 1 получаем

Теорема 2. *Если система (IAPCD \mathfrak{A}) при*

$$\ell = \binom{n + p_k - 1}{n} - \left\lfloor \frac{p_k + 1}{2} \right\rfloor$$

не имеет первых интегралов (3.3.3.2) и (9.3.3.2), и её особая точка A является регулярным центром, то система (IAPCD \mathfrak{A}) имеет либо первый интеграл (5.2.3.2), либо последний множитель (7.2.3.2).

Рассмотрим систему (IAPCD) в случае $n = 2, m = 1$, то есть, когда она является автономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой (APD) второго порядка.

На основании теоремы 1 получаем

Теорема 3. Пусть y дифференциальной системы (APD) второго порядка число

$$\ell = \frac{p(p+1)}{2} - \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor.$$

Тогда её особая точка второй группы может быть центром лишь тогда, когда уравнение траекторий этой системы имеет первый интеграл (1.3.3.2) или интегрирующий множитель (2.3.3.2).

Если использовать теорему 5.2 из [96, с. 30] при $\overline{\Delta} \neq 0$, а при $\overline{\Delta} = 0$ теорему 21.1 из [96, с. 164], то приходим к выводу.

Теорема 4. Пусть y дифференциальной системы (APD) второго порядка число

$$\ell = \frac{p(p+1)}{2} - \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor.$$

Тогда её особая точка второй группы, не расположенная на кривой (1.1), является центром тогда и только тогда, когда её уравнение траекторий имеет первый интеграл (1.3.3.2) или интегрирующий множитель (2.3.3.2).

Заметим, что если особая точка второй группы системы (APD) второго порядка с чисто мнимыми характеристическими корнями при выполнении условий теоремы 3 расположена на кривой (1.1), то различение центра и фокуса всегда можно осуществить на основании теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле (см. следствие 4.2 из [96, с. 28]).

На основании теоремы 3 заключаем, что имеет место

Теорема 5. Пусть система (APD) второго порядка имеет число

$$\ell = \frac{p(p+1)}{2} - \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$$

и хотя бы одну особую точку центр. Тогда её уравнение траекторий имеет либо первый интеграл (1.3.3.2), либо интегрирующий множитель (2.3.3.2).

Пример 1. Вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= (-x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^3)dt_1 + (-x_3 - 2x_2x_4 + x_4^3)dt_2 + \\ &\quad + (-x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4^3)dt_3, \\ dx_2 &= (x_1 - x_2^2)dt_1 - x_4dt_2 + (x_3 - x_4^3)dt_3, \\ dx_3 &= (-x_4 + 3x_3x_4^2 - 3x_4^5)dt_1 + (x_1 - x_2^2 + 3x_2x_4^2)dt_2 + \\ &\quad + (-x_2 + 3x_1x_4^2 - 3x_2^2x_4^2)dt_3, \\ dx_4 &= (x_3 - x_4^3)dt_1 + x_2dt_2 + (x_1 - x_2^2)dt_3 \end{aligned} \tag{5}$$

имеет на \mathbb{R}^4 полиномиальные частные интегралы

$$w_l: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^4 - 2x_3x_4^3 + x_4^6 - l, \quad l = \overline{1, 13}.$$

Особая точка $O(0, 0, 0, 0)$ вполне разрешимой системы (5) является регулярным центром, а сама система согласно теореме 2 при $k = 2$ имеет автономный первый интеграл

$$F: x \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^4 - 2x_3x_4^3 + x_4^6, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

§ 5. Классификация слоений дифференциальных уравнений

Пусть A и B — линейно связные гладкие многообразия размерностей $\dim A = n$ и $\dim B = m$.

Определение 1. Гладкое слоение L размерности m на многообразии $A \times B$, трансверсальное к $A \times \{b\}$ для всех $b \in B$, назовём **накрывающим слоением**, если естественная проекция $p: A \times B \rightarrow B$ определяет для каждого слоя этого слоения накрытие многообразия B .

В дальнейшем будем рассматривать линейно связные гладкие многообразия A_1, A_2, B_1, B_2 , считая, что многообразия A_1 и A_2 гомеоморфны друг другу и имеют одинаковую размерность

$$\dim A_1 = \dim A_2 = n,$$

а размерности

$$\dim B_1 = \dim B_2 = m.$$

Через L^j обозначим накрывающее слоение на многообразии $A_j \times B_j$, а через $L_{c_j}^j$ — слой накрывающего слоения L^j , содержащий точку $c_j \in A_j \times B_j$.

Естественные проекции на многообразия B_j и A_j соответственно обозначим

$$p_j: A_j \times B_j \rightarrow B_j \quad \text{и} \quad q_j: A_j \times B_j \rightarrow A_j, \quad j = \overline{1, 2}.$$

1. Вложимость

1.1. Накрывающие слоения

Определение 1. Накрывающее слоение L^1 **вложимо** в накрывающее слоение L^2 , если существует такое вложение

$$h: A_1 \times B_1 \hookrightarrow A_2 \times B_2,$$

что

$$\mathfrak{q}_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2 \quad \text{и} \quad h(L_{c_1}^1) \hookrightarrow L_{h(c_1)}^2, \quad \forall c_1 \in A_1 \times B_1.$$

Пусть ν — гомоморфизмы одномерной группы гомологий $H_1(B_1)$ в одномерную группу гомологий $H_1(B_2)$, индуцированные вложениями

$$g_\nu: B_1 \hookrightarrow B_2.$$

Группу гомоморфизмов ν обозначим $\text{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2))$.
При $j = 1$ и $j = 2$ действие

$$\Phi_j: A_j \times H_1(B_j) \rightarrow A_j$$

одномерной группы гомологий $H_1(B_j)$, порождённое накрывающим слоением L^j , на многообразии A_j определим формулой

$$\Phi_j^{[\alpha_j]}(a_j) = \mathfrak{q}_j \circ r_j \circ s_j(1), \quad a_j \in A_j, \quad [\alpha_j] \in H_1(B_j),$$

где $r_j(\tau)$ есть поднятие одного из путей

$$s_j(\tau) \subset B_j, \quad \forall \tau \in [0; 1],$$

которые соответствуют элементу $[\alpha_j]$ одномерной группы гомологий $H_1(B_j)$, на слой $L_{(a_j, s_j(0))}^j$ слоения L^j в точку $(a_j, s_j(0))$.

Теорема 1. Для вложимости накрывающего слоения L^1 в накрывающее слоение L^2 необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма $\nu \in \text{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2))$ и гомеоморфизма $f: A_1 \rightarrow A_2$, что

$$f \circ \Phi_1^{[\alpha]} = \Phi_2^{\nu([\alpha])} \circ f, \quad \forall [\alpha] \in H_1(B_1). \quad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение

$$h: A_1 \times B_1 \hookrightarrow A_2 \times B_2$$

задаёт вложимость слоения L^1 в слоение L^2 .

Возьмём фиксированную точку a_1^0 на многообразии A_1 и отмеченную точку b_1^0 на многообразии B_1 .

Для произвольной точки a_1 многообразия A_1 обозначим через $s(\tau)$, $\forall \tau \in [0; 1]$, такой путь в $A_1 \times \{b_1^0\} \subset A_1 \times B_1$, который соединяет точки (a_1, b_1^0) и (a_1^0, b_1^0) и при этом

$$s(0) = (a_1, b_1^0), \quad s(1) = (a_1^0, b_1^0).$$

Пусть

$$s_3(\tau) = \mathbf{p}_2 \circ h \circ s(\tau), \quad a_2 = \mathbf{q}_2 \circ h(a_1, b_1^0), \quad f(a_1) = \mathbf{q}_2 \circ r_3(1),$$

где $r_3(\tau)$ — поднятие пути $s_3(\tau)$, $\forall \tau \in [0; 1]$, на слой слоения L^2 в точку $(a_2, s_3(0))$.

Далее непосредственным образом проверяем выполнение соотношений (1).

Достаточность. Пусть для действий Φ_1 и Φ_2 имеет место соотношение (1).

Для пути $s_4: [0; 1] \rightarrow B_1$ такого, что $s_4(0) = b_1$, $s_4(1) = b_1^0$, положим

$$G(a_1, b_1) = (g_\nu s_6^{-1} \circ f \circ s_5(a_1), g_\nu(b_1)), \quad (2)$$

где

$$s_5(a_1) = \mathbf{q}_1 \circ r_4(1),$$

$r_4(\tau)$ — поднятие пути s_4 на слой слоения L^1 в точку (a_1, b_1) ,

$$g_\nu s_6^{-1}(a_2) = \mathbf{q}_2 \circ g_\nu r_5^{-1}(1),$$

$g_\nu r_5^{-1}(\tau)$ есть результат поднятия пути $g_\nu \circ s_4^{-1}$ на слой слоения L^2 в соответствующую точку, s_4^{-1} — путь, обратный пути s_4 .

Теперь непосредственно убеждаемся, что отображение (2) определяет вложение $L^1 \hookrightarrow L^2$. ■

Найдём условия вложимости накрывающих слоений.

Для этого введём в рассмотрение действия

$$\Phi_{jk*}: \pi_k(A_j) \times H_1(B_j) \rightarrow \pi_k(A_j)$$

одномерных групп гомологий $H_1(B_j)$, порождённые накрывающими слоениями L^j , на гомотопические группы $\pi_k(A_j)$ и действия

$$\Phi_{jk**} : H_k(A_j) \times H_1(B_j) \rightarrow H_k(A_j)$$

одномерных групп гомологий $H_1(B_j)$, порождённые накрывающими слоениями L^j , на k -мерные группы гомологий $H_k(A_j)$, $k = \overline{1, n-1}$, при $j = 1, j = 2$.

Эти действия определим в виде отображений:

$$\Phi_{jk*}^{[\alpha_j]} : \pi_k(A_j) \rightarrow \pi_k(A_j), \quad [\alpha_j] \in H_1(B_j), \quad (3)$$

и

$$\Phi_{jk**}^{[\alpha_j]} : H_k(A_j) \rightarrow H_k(A_j), \quad [\alpha_j] \in H_1(B_j), \quad (4)$$

где $\Phi_{jk*}^{[\alpha_j]}(\pi_k(A_j))$ и $\Phi_{jk**}^{[\alpha_j]}(H_k(A_j))$, $k = \overline{1, n-1}$, есть автоморфизмы, индуцированные гомеоморфизмом

$$\Phi_j^{[\alpha_j]} : A_j \rightarrow A_j,$$

при $j = 1, j = 2$.

Если каждое из многообразий A_1 и A_2 стягивается в точку (например, когда $A_1 = A_2 = \mathbb{C}^n$), то гомотопические группы $\pi_k(A_1)$ и $\pi_k(A_2)$, а также k -мерные группы гомологий $H_k(A_1)$ и $H_k(A_2)$ являются тривиальными.

В случае же, когда многообразия A_1 и A_2 не стягиваются в точку, могут быть полезными следующие два утверждения, которые следуют из теоремы 1 и указывают на возможные дополнительные топологические препятствия к вложимости накрывающих слоений.

Теорема 2. Действия (3) необходимо сопряжены при вложимости накрывающего слоения L^1 в накрывающее слоение L^2 , то есть,

$$\lambda \circ \Phi_{1k*}^{[\alpha]} = \Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])} \circ \lambda, \quad \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где гомоморфизм ν и изоморфизм λ такие, что

$$\nu \in \text{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2))$$

и

$$\lambda: \pi_k(A_1) \rightarrow \pi_k(A_2), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 3. Действия (4) необходимо сопряжены при вложимости накрывающего слоения L^1 в накрывающее слоение L^2 , то есть,

$$\sigma \circ \Phi_{1k**}^{[\alpha]} = \Phi_{2k**}^{\nu([\alpha])} \circ \sigma, \quad \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где гомоморфизм $\nu \in \text{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2))$, а изоморфизм

$$\sigma: H_k(A_1) \rightarrow H_k(A_2), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати

Рассмотрим уравнения Риккати

$$\frac{dw}{dz} = a_2(z)w^2 + a_1(z)w + a_0(z) \quad (5)$$

и

$$\frac{dw}{dz} = b_2(z)w^2 + b_1(z)w + b_0(z), \quad (6)$$

где функции a_i голоморфны на плоскости $\Gamma_1^{m_1}$ — комплексной плоскости с m_1 удалёнными точками $z_{11}, \dots, z_{m_1 1}$, а функции b_i голоморфны на плоскости $\Gamma_2^{m_2}$ — комплексной плоскости с m_2 удалёнными точками $z_{12}, \dots, z_{m_2 2}$, $i = \overline{0, 2}$.

Уравнение (5) определяет накрывающее слоение L^3 на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times \Gamma_1^{m_1}$, а уравнение (6) определяет накрывающее слоение L^4 на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times \Gamma_2^{m_2}$, где $\overline{\mathbb{C}}$ — сфера Римана.

Будем говорить, что уравнение Риккати (5) *вложимо* в уравнение Риккати (6), если накрывающее слоение L^3 вложимо в накрывающее слоение L^4 .

Для определения действий одномерных групп гомологий $H_1(\Gamma_1^{m_1})$ и $H_1(\Gamma_2^{m_2})$, порожденных накрывающими слоениями L^3 и L^4 , на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ (т. е. преобразований голономии) рассмотрим вспомогательные линейные однородные системы

$$\frac{dv_1}{dz} = a_1(z)v_1 + a_0(z)v_2, \quad \frac{dv_2}{dz} = -a_2(z)v_1 \quad (7)$$

и

$$\frac{dv_1}{dz} = b_1(z)v_1 + b_0(z)v_2, \quad \frac{dv_2}{dz} = -b_2(z)v_1. \quad (8)$$

Из того, что подстановкой

$$w = \frac{v_1}{v_2}$$

линейную систему (7) переводим в уравнение Риккати (5), а линейную систему (8) — в уравнение Риккати (6), получаем:

преобразования голономии уравнения Риккати (5), соответствующие выколотым точкам $z_{11}, \dots, z_{m_1 1}$, имеют вид

$$P_k(w) = \frac{p_{11k}w + p_{12k}}{p_{21k}w + p_{22k}}, \quad k = \overline{1, m_1};$$

преобразования голономии уравнения Риккати (6), соответствующие выколотым точкам $z_{12}, \dots, z_{m_2 2}$, имеют вид

$$Q_k(w) = \frac{q_{11k}w + q_{12k}}{q_{21k}w + q_{22k}}, \quad k = \overline{1, m_2}.$$

Дробно-линейным отображениям $P_k: w \rightarrow P_k(w)$ поставим в соответствие матрицы

$$P_k = \|p_{ijk}\| \in GL(2, \mathbb{C}), \quad k = \overline{1, m_1},$$

а дробно-линейным отображениям $Q_k: w \rightarrow Q_k(w)$ — матрицы

$$Q_k = \|q_{ijk}\| \in GL(2, \mathbb{C}), \quad k = \overline{1, m_2}.$$

Матрицы P_k назовём *матрицами голономии* уравнения Риккати (5), а матрицы Q_k — *матрицами голономии* уравнения Риккати (6).

Пусть $[g_{kj}]$, $k = \overline{1, m_j}$, есть положительно ориентированные образующие группы $H_1(\Gamma_j^{m_j})$, $j = 1, j = 2$.

Тогда группа $\text{Hom}(H_1(\Gamma_1^{m_1}), H_1(\Gamma_2^{m_2}))$ порождена отображениями

$$\{[g_{11}], \dots, [g_{m_1 1}]\} \rightarrow \Delta_1,$$

где набор Δ_1 состоит из m_1 элементов, принадлежащих множеству $\{[g_{12}], \dots, [g_{m_2 2}], [e_2]\}$, где $[e_2]$ — единичный элемент группы $H_1(\Gamma_2^{m_2})$, а каждая из образующих $[g_{12}], \dots, [g_{m_2 2}]$ входит не более одного раза; и автоморфизмом

$$\text{Aut } H_1(\Gamma_2^{m_2}) : [g_{k2}] \rightarrow [g_{k2}]^{-1}, \quad k = \overline{1, m_2}.$$

Обозначим через $\hat{\Delta}_1$ набор натуральных чисел, образованный из набора Δ_1 по следующему правилу: на соответствующее место набора Δ_1 в случае элемента $[g_{k2}]$ ставится индекс k , а в случае элемента $[e_2]$ ставится индекс $m_2 + 1$.

При этом будем полагать $Q_{m_2+1} = I$ — единичная матрица.

Теорема 4. Для вложимости уравнения Риккати (5) в уравнение Риккати (6) необходимо, чтобы существовало такое отображение

$$\chi : (1, \dots, m_1) \rightarrow \hat{\Delta}_1,$$

что нормальные жордановы формы матриц P_k и $Q_{\chi(k)}$ имеют одинаковое число блоков Жордана, $k = \overline{1, m_1}$.

Доказательство. Пусть уравнение Риккати (5) вложимо в уравнение Риккати (6). Тогда, по теореме 1,

$$f \circ P_k(w) = Q_{\chi(k)} \circ f(w), \quad \forall w \in \overline{\mathcal{C}}. \quad (9)$$

Матрицу P_k представим в виде

$$P_k = S_k J_k S_k^{-1},$$

где J_k есть нормальная жорданова форма матрицы P_k .

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$P_k(w) = S_k \circ J_k \circ S_k^{-1}(w), \quad \forall w \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (10)$$

где $S_k: w \rightarrow S_k(w)$ есть дробно-линейное отображение, поставленное в соответствие по вышеприведённому правилу матрице S_k , а $J_k: w \rightarrow J_k(w)$ — матрице J_k , отображение S_k^{-1} является обратным к отображению S_k .

С учётом (10) из (9) получаем:

$$h \circ J_k(w) = Q_{\chi(k)} \circ h(w), \quad \forall w \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (11)$$

где

$$h(w) = f \circ S_k(w).$$

Гомеоморфизм $h: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ переводит точку 0 в точку $w_1 \in \overline{\mathbb{C}}$, а точку ∞ — в точку $w_2 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Возьмём такое дробно-линейное отображение $u: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, что

$$u: w_1 \rightarrow 0, \quad u: w_2 \rightarrow \infty.$$

Выполнив замену гомеоморфизмов

$$v = u \circ h,$$

из соотношения (11) получим:

$$v \circ J_k(w) = u \circ Q_{\chi(k)} \circ u^{-1} \circ v(w), \quad \forall w \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (12)$$

где

$$u \circ Q_{\chi(k)} \circ u^{-1}(w) = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

а гомеоморфизм $v: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ такой, что

$$v(0) = 0, \quad v(\infty) = \infty. \quad (13)$$

Пусть нормальная жорданова форма J_k матрицы P_k состо-

ит из двух блоков Жордана, то есть,

$$J_k = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда отображение

$$J_k(w) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} w.$$

На основании (12) при условии (13) получаем, что $b = c = 0$, то есть,

$$u \circ Q_{\chi(k)} \circ u^{-1}(w) = \frac{a}{d} w.$$

Очевидно, что дробно-линейному отображению

$$w \rightarrow \frac{a}{d} w$$

соответствует нормальная жорданова форма матрицы $Q_{\chi(k)}$, состоящая из двух блоков.

В силу произвольности выбора k теорема 4 доказана. ■

Лемма 1. Пусть λ_k и μ_k — ненулевые комплексные числа, когда $k \in I$, где I — некоторое множество индексов. Тогда равносильны следующие условия:

а) существует такой гомеоморфизм $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, что

$$H(\lambda_k t) = \mu_k H(t) \quad (14)$$

для всех $k \in I$;

б) существует такое комплексное число α с $\operatorname{Re} \alpha > -1$, что либо

$$\mu_k = \lambda_k |\lambda_k|^\alpha \quad (15)$$

для всех $k \in I$, либо

$$\overline{\mu_k} = \lambda_k |\lambda_k|^\alpha \quad (16)$$

для всех $k \in I$.

Доказательство [1, с. 91 – 93; 85]. Пусть выполняется условие б), причём для определённости будем считать, что имеет место условие (15). Положим

$$H: t \rightarrow t|t|^\alpha.$$

Тогда $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — гомеоморфизм и в силу (15) имеем:

$$H(\lambda_k t) = \lambda_k t |\lambda_k t|^\alpha = \lambda_k |\lambda_k|^\alpha t |t|^\alpha = \mu_k H(t).$$

Импликация б) \implies а) доказана.

Докажем импликацию а) \implies б).

Пусть гомеоморфизм $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ сохраняет ориентацию. Покажем, что в этом случае выполняется условие (15). (Если гомеоморфизм H меняет ориентацию, то аналогичным образом выводится условие (16).)

Для всех $k \in I$ с условием, что $|\lambda_k| = 1$, имеем

$$\mu_k = \lambda_k.$$

Стало быть, условие (15) выполняется при любом α . (Вращения комплексной прямой на углы φ и ψ , где $0 \leq \varphi$, а $\psi < 2\pi$, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\varphi = \psi$.)

Если $|\lambda_k| \neq 1$ и $|\lambda_l| \neq 1$ для некоторых k и l из I , то

$$\operatorname{sgn} \ln |\lambda_k| = \operatorname{sgn} \ln |\mu_k|. \quad (17)$$

Существуют такие последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ ненулевых целых чисел, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{p_n} \lambda_l^{q_n} = 1, \quad (18)$$

причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = \infty.$$

Из равенства (14) следует, что

$$H(\lambda_k^{p_n} \lambda_l^{q_n} t) = \mu_k^{p_n} \mu_l^{q_n} H(t).$$

Отсюда и из (18) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{p_n} \mu_l^{q_n} = 1. \quad (19)$$

Из равенств (18), (19) для некоторых значений логарифмов получаем соотношения

$$\frac{\ln |\lambda_k|}{\ln |\lambda_l|} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} \quad (20)$$

и

$$p_n \ln \lambda_k + q_n \ln \lambda_l = p_n \ln \mu_k + q_n \ln \mu_l. \quad (21)$$

Если теперь левую и правую части равенства (21) разделить на p_n и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то с учётом (20) получим равенство

$$\frac{\ln \mu_k - \ln \lambda_k}{\ln |\lambda_k|} = \frac{\ln \mu_l - \ln \lambda_l}{\ln |\lambda_l|}. \quad (22)$$

Полагая

$$\alpha_k = \frac{\ln \mu_k - \ln \lambda_k}{\ln |\lambda_k|},$$

получаем равенство (15), где $\alpha = \alpha_k$.

Из равенства (22) следует, что $\alpha_k = \alpha_l = \alpha$ для всех k и l из I с учётом того, что $|\lambda_k| \neq 1$ и $|\lambda_l| \neq 1$.

Неравенство $\operatorname{Re} \alpha > -1$ следует из равенства

$$\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \alpha_k = \frac{\ln |\mu_k|}{\ln |\lambda_k|} - 1$$

и равенства (17). ■

Теорема 5. Пусть $\{p_{1k}, p_{2k}\}$ есть множество собственных чисел матрицы голономии P_k простой структуры уравнения (5), $k = \overline{1, m_1}$, а $\{q_{1k}, q_{2k}\}$ есть множество собственных чисел матрицы голономии Q_k простой структуры уравнения (6), $k = \overline{1, m_2}$.

Матрицы P_k , $k = \overline{1, m_1}$, и Q_k , $k = \overline{1, m_2}$, соответственно перестановочны.

Тогда уравнение Риккати (5) вложимо в уравнение Риккати (6), если и только если существуют отображение $\chi: (1, \dots, m_1) \rightarrow \hat{\Delta}_1$ и число $\alpha \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \alpha \neq -1$, что

$$\frac{q_{1\chi(k)}}{q_{2\chi(k)}} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \left| \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \right|^\alpha, \quad k = \overline{1, m_1},$$

или

$$\overline{q_{1\chi(k)}/q_{2\chi(k)}} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \left| \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \right|^\alpha, \quad k = \overline{1, m_1}.$$

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 4 на основании леммы 1 и того факта [21, с. 194], что перестановочные матрицы простой структуры приводятся к диагональному виду одним преобразованием подобия. ■

Аналогично теореме 5 доказывается

Теорема 6. Пусть $\{p_{1k}, p_{2k}\}$ есть множество собственных чисел матрицы голономии P_k простой структуры уравнения (5), $k = \overline{1, m_1}$, а $\{q_{1k}, q_{2k}\}$ есть множество собственных чисел матрицы голономии Q_k простой структуры уравнения (6), $k = \overline{1, m_2}$. Тогда для вложимости уравнения Риккати (5) в уравнение Риккати (6) необходимо, чтобы существовали отображение $\chi: (1, \dots, m_1) \rightarrow \hat{\Delta}_1$ и числа $\alpha_k \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \alpha_k \neq -1$ такие, что

$$\frac{q_{1\chi(k)}}{q_{2\chi(k)}} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \left| \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \right|^{\alpha_k}, \quad k = \overline{1, m_1},$$

или

$$\overline{q_{1\chi(k)}/q_{2\chi(k)}} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \left| \frac{p_{1k}}{p_{2k}} \right|^{\alpha_k}, \quad k = \overline{1, m_1}.$$

2. Эквивалентность

2.1. Накрывающие слоения

В этом пункте будем считать многообразия B_1 и B_2 гомеоморфными.

Определение 1. Два накрывающих слоения L^1 и L^2 *топологически эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм $h: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$, что

$$q_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2$$

и

$$h(L_{c_1}^1) = L_{h(c_1)}^2, \forall c_1 \in A_1 \times B_1.$$

Будем рассматривать изоморфизмы ν одномерных групп гомологий $H_1(B_1)$ и $H_1(B_2)$, индуцированные гомеоморфизмами

$$g_\nu: B_1 \rightarrow B_2.$$

Группу таких изоморфизмов обозначим $I(H_1(B_1), H_1(B_2))$.

Из теоремы 1.1 следует

Теорема 1. Для топологической эквивалентности накрывающих слоений L^1 и L^2 необходимо и достаточно существования изоморфизма $\nu \in I(H_1(B_1), H_1(B_2))$ и гомеоморфизма $f: A_1 \rightarrow A_2$ таких, что выполняются соотношения (1.1).

Аналогично теоремам 2.1 и 3.1 доказываем

Теорема 2. Действия (3.1) необходимо сопряжены при топологической эквивалентности накрывающих слоений L^1 и L^2 , то есть,

$$\lambda \circ \Phi_{1k*}^{[\alpha]} = \Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])} \circ \lambda, \forall [\alpha] \in H_1(B_1), k = \overline{1, n-1},$$

где изоморфизмы ν и λ такие, что

$$\nu \in I(H_1(B_1), H_1(B_2)) \text{ и } \lambda: \pi_k(A_1) \rightarrow \pi_k(A_2), k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 3. Действия (4.1) необходимо сопряжены при топологической эквивалентности накрывающих слоений L^1 и L^2 , то есть,

$$\sigma \circ \Phi_{1k**}^{[\alpha]} = \Phi_{2k**}^{\nu([\alpha])} \circ \sigma, \quad \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где изоморфизмы ν и σ такие, что

$$\nu \in I(H_1(B_1), H_1(B_2)) \text{ и } \sigma: H_k(A_1) \rightarrow H_k(A_2), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

2.2. Обыкновенные линейные дифференциальные системы

Рассмотрим линейные дифференциальные системы

$$\frac{dw}{dz} = A(z)w \tag{1}$$

и

$$\frac{dw}{dz} = B(z)w, \tag{2}$$

где матрицы $A(z) = \|a_{ik}(z)\|$ и $B(z) = \|b_{ik}(z)\|$ являются квадратными порядка $n \geq 2$ с элементами $a_{ik}: \Gamma_1^m \rightarrow \mathbb{C}$, голоморфными на комплексной прямой Γ_1^m (с m удалёнными точками z_{11}, \dots, z_{m1}), и $b_{ik}: \Gamma_2^m \rightarrow \mathbb{C}$, голоморфными на комплексной прямой Γ_2^m (с m удалёнными точками z_{12}, \dots, z_{m2}), $i, k = \overline{1, n}$, $w = \text{col}(w_1, \dots, w_n)$.

Система (1) (система (2)) определяет накрывающее слоение L^5 (накрывающее слоение L^6) на многообразии $\mathbb{C}^n \times \Gamma_1^m$ (на многообразии $\mathbb{C}^n \times \Gamma_2^m$).

Будем говорить, что система (1) *топологически эквивалентна* системе (2), если накрывающее слоение L^5 топологически эквивалентно накрывающему слоению L^6 .

Преобразования голономии на пространстве \mathbb{C}^n системы (1), соответствующие точкам z_{j1} , имеют вид

$$P_j w, \quad \forall w \in \mathbb{C}^n, \quad P_j \in GL(n, \mathbb{C}), \quad j = \overline{1, m},$$

а системы (2), соответствующие точкам z_{j2} , имеют вид

$$Q_j w, \forall w \in \mathbb{C}^n, Q_j \in GL(n, \mathbb{C}), j = \overline{1, m}.$$

Матрицы P_j и Q_j назовём *матрицами голономии* соответственно систем (1) и (2).

При этом матрицы P_j и Q_j — простой структуры, а матрицы $\ln P_j$ и $\ln Q_j$ — гиперболичны, т.е. [3, с. 84] никакие два собственных числа каждой из этих матриц не имеют вещественного отношения.

Теорема 4. Пусть $\{p_{1j}, \dots, p_{nj}\}$ есть множество собственных чисел матрицы голономии P_j простой структуры линейной системы (1), а $\{q_{1j}, \dots, q_{nj}\}$ есть множество собственных чисел матрицы голономии Q_j простой структуры линейной системы (2), матрицы $\ln P_j$ и $\ln Q_j$ — гиперболичны, $j = \overline{1, m}$. Тогда:

1) для топологической эквивалентности линейных систем (1) и (2) необходимо, чтобы существовали такие перестановки

$$\chi: (1, \dots, m) \rightarrow (1, \dots, m),$$

$$\rho_j: (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n), j = \overline{1, m},$$

и числа α_{ij} с $\operatorname{Re} \alpha_{ij} \neq -1$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, что

$$q_{\rho_j(i)\chi(j)} = p_{ij} |p_{ij}|^{\alpha_{ij}}, j = \overline{1, m},$$

или

$$\bar{q}_{\rho_j(i)\chi(j)} = p_{ij} |p_{ij}|^{\alpha_{ij}}, j = \overline{1, m},$$

при $i = \overline{1, n}$;

2) для топологической эквивалентности линейных систем (1) и (2) в случае перестановочности матриц голономии каждой из систем, необходимо и достаточно существования таких перестановок

$$\chi: (1, \dots, m) \rightarrow (1, \dots, m), \rho: (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n),$$

и чисел α_i с $\operatorname{Re} \alpha_i \neq -1$, $i = \overline{1, n}$, что

$$q_{\rho(i)\chi(j)} = p_{ij} |p_{ij}|^{\alpha_i}, \quad j = \overline{1, m},$$

или

$$\bar{q}_{\rho(i)\chi(j)} = p_{ij} |p_{ij}|^{\alpha_i}, \quad j = \overline{1, m},$$

при $i = \overline{1, n}$.

Для доказательства этой теоремы будет использована

Лемма 1. Пусть $\{p_1, \dots, p_n\}$ — множество собственных чисел матрицы $P \in GL(n, \mathbb{C})$, а $\{q_1, \dots, q_n\}$ — множество собственных чисел матрицы $Q \in GL(n, \mathbb{C})$, матрицы $\ln P$ и $\ln Q$ — гиперболически, $n \geq 2$. Тогда для существования гомеоморфизма $\xi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ со свойством

$$\xi(Pw) = Q\xi(w), \quad \forall w \in \mathbb{C}^n, \quad \xi(w) = (\xi_1(w), \dots, \xi_n(w)), \quad (3)$$

необходимо и достаточно наличия чисел α_τ с $\operatorname{Re} \alpha_\tau > -1$ и перестановки $\rho: (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$ таких, чтобы

$$q_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau} \quad \text{или} \quad \bar{q}_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}, \quad \tau = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Матрицы P и Q представим в виде

$$P = R \operatorname{diag} (p_1, \dots, p_n) R^{-1}, \quad Q = S \operatorname{diag} (q_1, \dots, q_n) S^{-1},$$

где p_τ и q_τ , $\tau = \overline{1, n}$, есть собственные числа матриц P и Q соответственно.

Тогда для гомеоморфизма

$$\varphi: w \rightarrow S^{-1} \xi(Rw), \quad \forall w \in \mathbb{C}^n,$$

условием топологической сопряжённости (3) будет

$$\varphi(\operatorname{diag} (p_1, \dots, p_n) w) = \operatorname{diag} (q_1, \dots, q_n) \varphi(w), \quad \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

Каждой из матриц P и Q на пространстве \mathbb{C}^n соответственно задаётся отображение

$$u: w \rightarrow Pw, \forall w \in \mathbb{C}^n, \text{ и } v: w \rightarrow Qw, \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

Отображение u определяет на пространстве \mathbb{C}^n инвариантное голоморфное слоение комплексной размерности один.

Такой же вывод можно сделать и для отображения v .

Одномерное голоморфное слоение \mathfrak{U} , являющееся инвариантным относительно отображения u , определяется универсальным инвариантом

$$w_\zeta^{-\lambda_n} w_n^{\lambda_\zeta}, \zeta = \overline{1, n-1},$$

этого отображения, где $\lambda_\tau, \tau = \overline{1, n}$, есть собственные числа матрицы $\ln P$.

Аналогично, одномерное голоморфное слоение \mathfrak{V} , инвариантное относительно отображения v , определяется универсальным инвариантом

$$w_\zeta^{-\mu_n} w_n^{\mu_\zeta}, \zeta = \overline{1, n-1},$$

этого отображения, где $\mu_\tau, \tau = \overline{1, n}$, есть собственные числа матрицы $\ln Q$.

Через \mathbb{C}_τ обозначим комплексную координатную прямую

$$w_\zeta = 0, \zeta = \overline{1, n}, \zeta \neq \tau,$$

а через $\mathring{\mathbb{C}}_\tau$ — комплексную координатную прямую \mathbb{C}_τ с выколотым началом координат, $\tau = \overline{1, n}$.

Так как матрицы $\ln P$ и $\ln Q$ являются гиперболическими, то

$$\operatorname{Im}(\lambda_n \lambda_\zeta^{-1}) \neq 0 \text{ и } \operatorname{Im}(\mu_n \mu_\zeta^{-1}) \neq 0, \zeta = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, замыкание каждой из гиперповерхностей

$$w_\zeta^{-\lambda_n} w_n^{\lambda_\zeta} = C_\zeta \text{ и } w_\zeta^{-\mu_n} w_n^{\mu_\zeta} = C_\zeta$$

при $C_\zeta \neq 0$ содержит гиперплоскость $w_\zeta = 0, \zeta = \overline{1, n-1}$.

Поэтому у слоения \mathfrak{U} слои $u_\tau = \mathring{\mathbb{C}}_\tau, \tau = \overline{1, n}$, гомеоморфны между собой и негомеоморфны любым другим его слоям.

Аналогично у слоения \mathfrak{V} слои $v_\tau = \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\tau$, $\tau = \overline{1, n}$, гомеоморфны между собой и негомеоморфны любым другим слоям этого слоения.

Гомеоморфизм φ , удовлетворяющий условию топологической сопряжённости, переводит слой u_τ слоения \mathfrak{U} в слой $v_{\rho(\tau)}$ слоения \mathfrak{V} , $\tau = \overline{1, n}$, причём начало координат суть неподвижная точка этого гомеоморфизма.

Тогда у гомеоморфизма φ проекции $\varphi_\tau: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что их сужения $\tilde{\varphi}_\tau: \mathbb{C}_\tau \rightarrow \mathbb{C}_{\rho(\tau)}$ являются гомеоморфизмами и

$$\tilde{\varphi}_\tau(p_\tau \tilde{w}_\tau) = q_{\rho(\tau)} \tilde{\varphi}_\tau(\tilde{w}_\tau), \quad \forall \tilde{w}_\tau = (0, \dots, 0, w_\tau, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}_\tau,$$

где $\tau = \overline{1, n}$.

Отсюда на основании леммы 1.1 приходим к выводу, что существуют числа α_τ с $\operatorname{Re} \alpha_\tau > -1$ такие, что

$$q_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau} \quad \text{или} \quad \bar{q}_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}, \quad \tau = \overline{1, n}.$$

Для доказательства достаточности рассмотрим отображение

$$H: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad H(w) = \operatorname{colon} (H_1(w), \dots, H_n(w)),$$

такое, что

$$H_{\rho(\tau)}(w) = w_\tau |w_\tau|^{\alpha_\tau}, \quad \text{если} \quad q_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}, \quad \tau = \overline{1, n},$$

и

$$H_{\rho(\tau)}(w) = \bar{w}_\tau |w_\tau|^{\bar{\alpha}_\tau}, \quad \text{если} \quad \bar{q}_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}, \quad \tau = \overline{1, n}.$$

Непосредственно убеждаемся, что отображение H является сопрягающим гомеоморфизмом. ■

Доказательство теоремы 4. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 1 и теоремы 1.

Для доказательства второго утверждения достаточно воспользоваться свойством приведения перестановочных матриц простой структуры к диагональному виду общим перобразованием подобия. ■

Рассмотрим теперь линейные системы (1) и (2) в случае, когда квадратные матрицы A и B порядка $n \geq 2$ имеют элементы

$$a_{ik}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad b_{ik}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad i, k = \overline{1, n},$$

голоморфные и 1-периодические на комплексной прямой \mathbb{C} .

В этом случае системы (1) и (2) определяют соответственно накрывающие слоения L^7 и L^8 на многообразии $\mathbb{C}^n \times Z$, где Z есть цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$.

Системы (1) и (2) с периодическими коэффициентами будем называть *топологически эквивалентными*, если топологически эквивалентны накрывающие слоения L^7 и L^8 .

Нетрудно видеть, что преобразования голономии на пространстве \mathbb{C}^n систем (1) и (2) с периодическими коэффициентами определяются соответственно формулами

$$Pw, \quad \forall w \in \mathbb{C}^n, \quad \text{и} \quad Qw, \quad \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

Матрицы P и Q назовём *матрицами голономии* соответственно систем (1) и (2) с периодическими коэффициентами.

Теорема 5. Пусть $\{p_1, \dots, p_n\}$ ($\{q_1, \dots, q_n\}$) — множество собственных чисел матрицы голономии P (матрицы голономии Q) простой структуры системы (1) (системы (2)) с периодическими коэффициентами, матрица $\ln P$ (матрица $\ln Q$) гиперболична. Тогда системы (1) и (2) с периодическими коэффициентами топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют перестановка $\rho: (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$ и числа α_k с $\operatorname{Re} \alpha_k \neq -1$, $k = \overline{1, n}$, такие, что

$$q_{\rho(k)} = p_k |p_k|^{\alpha_k} \quad \text{или} \quad \bar{q}_{\rho(k)} = p_k |p_k|^{\alpha_k}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Доказательство этой теоремы проводится на основании леммы 1 аналогично доказательству теоремы 4. ■

2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати

Рассмотрим уравнения Риккати (5.1) и (6.1) с 1-периодическими голоморфными на \mathbb{C} коэффициентами a_i и b_i , $i = \overline{0, 2}$, которые назовём 1-периодическими уравнениями Риккати.

Пусть 1-периодическое уравнение (5.1) определяет накрывающее слоение L^9 на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times Z$, где Z — цилиндр, а 1-периодическое уравнение (6.1) — накрывающее слоение L^{10} на том же многообразии.

Будем говорить, что 1-периодическое уравнение Риккати (5.1) *топологически эквивалентно* 1-периодическому уравнению Риккати (6.1), если накрывающее слоение L^9 топологически эквивалентно накрывающему слоению L^{10} .

На основании результатов подпункта 1.2 получаем, что преобразование голономии 1-периодического уравнения (5.1), соответствующее образующей группы $H_1(Z)$, имеет вид

$$P(w) = \frac{p_{11}w + p_{12}}{p_{21}w + p_{22}},$$

а преобразование голономии 1-периодического уравнения (6.1), соответствующее той же образующей, — вид

$$Q(w) = \frac{q_{11}w + q_{12}}{q_{21}w + q_{22}}.$$

Дробно-линейному отображению $P: w \rightarrow P(w)$ поставим в соответствие матрицу

$$P = \|p_{ij}\| \in GL(2, \mathbb{C}),$$

а дробно-линейному отображению $Q: w \rightarrow Q(w)$ — матрицу

$$Q = \|q_{ij}\| \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Матрицу P назовём *матрицей голономии* 1-периодического уравнения Риккати (5.1), а матрицу Q — *матрицей голономии* 1-периодического уравнения Риккати (6.1).

На основании теорем 1, 4.1, 5.1 и леммы 1.1 получаем

Теорема 6. *Для топологической эквивалентности 1-периодических уравнений Риккати (5.1) и (6.1) необходимо, чтобы нормальные жордановы формы их матриц голономии P и Q имели одинаковую структуру.*

Теорема 7. Пусть P есть матрица голономии простой структуры с собственными числами p_1 и p_2 1-периодического уравнения Риккати (5.1), Q — матрица голономии простой структуры с собственными числами q_1 и q_2 1-периодического уравнения Риккати (6.1). Тогда для топологической эквивалентности 1-периодических уравнений Риккати (5.1) и (6.1) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое комплексное число α с $\operatorname{Re} \alpha \neq -1$, что

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{p_1}{p_2} \right|^\alpha \quad \text{или} \quad \overline{q_1/q_2} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{p_1}{p_2} \right|^\alpha.$$

Теорема 8. Пусть матрицы голономии 1-периодических уравнений (5.1) и (6.1) имеют соответственно нормальные формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{cc} \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right\|,$$

причём $\mu_1 \mu_2 \neq 0$. Тогда 1-периодические уравнения Риккати (5.1) и (6.1) топологически эквивалентны.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 6.

Достаточность. Используя рассуждения, аналогичные применённым при доказательстве теоремы 4.1, получаем, что из топологической эквивалентности 1-периодических уравнений Риккати (5.1) и (6.1) следует существование такого гомеоморфизма $\xi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, что

$$\xi\left(w + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) = \xi(w) + \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad \forall w \in \mathbb{C},$$

а в качестве сопрягающего гомеоморфизма можно взять

$$\xi(w) = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1} w, \quad \forall w \in \mathbb{C}. \blacksquare$$

2.4. Уравнения Риккати в полных дифференциалах

Рассмотрим вполне разрешимые уравнения Риккати

$$dw = \sum_{j=1}^m (a_{2j}(z)w^2 + a_{1j}(z)w + a_{0j}(z)) dz_j, \quad (4)$$

$$dw = \sum_{j=1}^m (b_{2j}(z)w^2 + b_{1j}(z)w + b_{0j}(z)) dz_j, \quad (5)$$

где $z = (z_1, \dots, z_m)$, коэффициенты a_{ij} и b_{ij} являются 1-периодическими по каждому аргументу z_j и голоморфными на \mathbb{C}^m функциями, $i = \overline{0, 2}$, $j = \overline{1, m}$, $m > 1$.

Уравнения (4) и (5) соответственно определяют накрывающие слоения L^{11} и L^{12} на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times Z^m$, где Z^m — декартово произведение m цилиндров Z .

Будем говорить, что уравнения Риккати (4) и (5) *топологически эквивалентны*, если топологически эквивалентны накрывающие слоения L^{11} и L^{12} .

Для нахождения преобразований голономии на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, определяемых накрывающими слоениями L^{11} и L^{12} , рассмотрим вспомогательные вполне разрешимые линейные однородные системы

$$dv_1 = \sum_{j=1}^m (a_{1j}(z)v_1 + a_{0j}(z)v_2) dz_j, \quad (6)$$

$$dv_2 = - \sum_{j=1}^m a_{2j}(z)v_1 dz_j$$

и

$$dv_1 = \sum_{j=1}^m (b_{1j}(z)v_1 + b_{0j}(z)v_2) dz_j, \quad (7)$$

$$dv_2 = - \sum_{j=1}^m b_{2j}(z)v_1 dz_j.$$

Как и в подпункте 1.2, из того, что подстановкой

$$w = \frac{v_1}{v_2}$$

систему (6) переводим в уравнение (4), а систему (7) — в уравнение (5), получаем:

преобразования голономии уравнения (4), соответствующие образующим $[\alpha_j] \in H_1(Z^m)$, имеют вид

$$P_j(w) = \frac{p_{11j}w + p_{12j}}{p_{21j}w + p_{22j}}, \quad j = \overline{1, m}; \quad (8)$$

преобразования голономии уравнения Риккати (5), соответствующие $[\alpha_j] \in H_1(Z^m)$, — вид

$$Q_j(w) = \frac{q_{11j}w + q_{12j}}{q_{21j}w + q_{22j}}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Дробно-линейным отображениям $P_j: w \rightarrow P_j(w)$ поставим в соответствие матрицы

$$P_j = \|p_{ikj}\| \in GL(2, \mathbb{C}), \quad j = \overline{1, m}, \quad (10)$$

а дробно-линейным отображениям $Q_j: w \rightarrow Q_j(w)$ — матрицы

$$Q_j = \|q_{ikj}\| \in GL(2, \mathbb{C}), \quad j = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Преобразования (8), (9) и, следовательно, матрицы (10), (11) являются перестановочными, так как дробно-линейные преобразования голономии определяются гомоморфизмами абелевой группы $H_1(Z^m)$ в группу дробно-линейных преобразований сферы Римана.

Матрицы P_j назовём *матрицами голономии* уравнения Риккати (4), а матрицы Q_j — *матрицами голономии* уравнения Риккати (5).

Лемма 2. Пусть нетождественные дробно-линейные отображения $P(w)$ и $Q(w)$ сферы Римана перестановочны.

Тогда нормальные жордановы формы соответствующих им матриц $P \in GL(2, \mathbb{C})$ и $Q \in GL(2, \mathbb{C})$ имеют одинаковую структуру.

Доказательство следует из того, что число различных собственных чисел матрицы P (матрицы Q) совпадает с числом неподвижных точек как отображения $P(w)$ (отображения $Q(w)$), так и отображения $P^2(w)$ (отображения $Q^2(w)$), где степень означает суперпозицию отображений. ■

На основании теоремы 1 и леммы 2 аналогично теоремам 6, 5.1 и 7 доказываем следующие утверждение.

Теорема 9. Пусть P_j есть матрицы голономии уравнения Риккати (4), Q_j — матрицы голономии уравнения Риккати (5), $j = \overline{1, m}$. Тогда для топологической эквивалентности уравнений Риккати (4) и (5) необходимо, чтобы нормальные жордановы формы матриц P_j и Q_j , определяющих нетождественные дробно-линейные преобразования, имели одинаковую структуру при $j = \overline{1, m}$.

Теорема 10. Пусть матрицы голономии уравнений (4) и (5) имеют соответственно нормальные жордановы формы

$$\text{diag} \{ \lambda_{1j}, \lambda_{2j} \} \quad \text{и} \quad \text{diag} \{ \mu_{1j}, \mu_{2j} \}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда для топологической эквивалентности уравнений Риккати (4) и (5) необходимо и достаточно, чтобы существовали такие унимодулярная матрица $\|a_{ik}\|$ размера m и комплексное число α с $\text{Re } \alpha \neq -1$, что

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{\mu_{1k}}{\mu_{2k}} \right)^{a_{ik}} = \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \left| \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \right|^\alpha, \quad i = \overline{1, m},$$

или

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{\mu_{1k}}{\mu_{2k}} \right)^{a_{ik}} = \overline{\lambda_{1i}/\lambda_{2i}} \left| \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \right|^\alpha, \quad i = \overline{1, m}.$$

2.5. Автономные линейные системы уравнений в полных дифференциалах

Рассмотрим линейную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{\zeta=1}^m A_{\zeta} w dz_{\zeta} \equiv A(w) dz, \quad (12)$$

когда $w \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}^m$, $n \geq 3$, $2 \leq m \leq n-1$.

Пусть линейная система (12) является вполне разрешимой (матрицы A_{ζ} , $\zeta = \overline{1, m}$, перестановочны) и у матрицы A ранг $\text{rank } A(w) = m$ почти везде на \mathbb{C}^n .

Системой (12) устанавливается отображение W пространства $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ в пространство \mathbb{C}^n посредством линейного действия

$$W: (w, z) \rightarrow \exp\left(\sum_{\zeta=1}^m A_{\zeta} z_{\zeta}\right) w, \quad \forall w \in \mathbb{C}^n, \quad \forall z_{\zeta} \in \mathbb{C}, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

построенного на основании её фундаментальной системы решений

$$\exp \sum_{\zeta=1}^m A_{\zeta} z_{\zeta}.$$

В соответствии с теоремой 2.2.7.1 это линейное действие определяет m -мерное слоение на множестве V регулярных точек системы (12) (т. е. тех точек w , в которых $\text{rank } A(w) = m$).

Пусть A_{ζ} , $\zeta = \overline{1, m}$, есть матрицы простой структуры с характеристическими корнями $\lambda_{i\zeta}$, $i = \overline{1, n}$, $\zeta = \overline{1, m}$.

Тогда [21, с. 194] существует линейное невырожденное преобразование независимых переменных, посредством которого систему (12) приводим к виду

$$dw_i = \sum_{\zeta=1}^m \lambda_{i\zeta} w_i dz_{\zeta}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Относительно характеристической матрицы

$$\Lambda = \|\lambda_{i\zeta}\|_{n \times m}$$

условимся, что определители её миноров m -го порядка отличны от нуля.

При этом в соответствии с теоремой 1.5.2.3 система (13) имеет базис автономных первых интегралов

$$F_k^{(13)}: z \rightarrow w_{m+k}(z) \prod_{l=1}^m w_l^{\alpha_{lk}}(z), \quad k = \overline{1, n-m}, \quad (14)$$

где показатели степеней $\alpha_{lk} \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n-m}$.

Из всего множества систем (13) выделим те, у которых гиперболичны наборы

$$\alpha_k = (\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}, 1), \quad k = \overline{1, n-m},$$

составленные из показателей степеней первых интегралов (14).

Множество таких систем отнесём к *классу H*.

Для системы (13) $(m-1)$ -мерные комплексные плоскости

$$w_{i_1} = 0, \dots, w_{i_{n-m+1}} = 0, \quad i_\tau \in \{1, \dots, n\}, \quad \tau = \overline{1, n-m+1},$$

состоят из её сингулярных точек [16, с. 115].

Множество Π таких плоскостей исчерпывает множество сингулярных точек системы (13), а поэтому у этой системы множество регулярных точек $V = \mathbb{C}^n \setminus \Pi$.

Определяемые базисными первыми интегралами (14) слои

$$F_k^{(13)}(z) = C_k^{(13)}, \quad k = \overline{1, n-m}, \quad (15)$$

при $C_k^{(13)} \neq 0$, $k = \overline{1, n-m}$, назовём *неособыми*, а остальные слои, определяемые соотношениями (15), — *особыми*.

Принадлежность системы (13) *классу H* предполагает гиперболичность наборов α_k , $k = \overline{1, n-m}$. Поэтому неособые слои системы (13) *класса H* негомеоморфны её особым слоям.

Поставим задачу топологической классификации слоений системы (13) класса H . Для этого наряду с системой (13) класса H рассмотрим систему

$$dw_i = \sum_{\zeta=1}^m \mu_{i\zeta} w_i dz_\zeta, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

того же класса с базисом автономных первых интегралов

$$F_k^{(16)}: z \rightarrow w_{m+k}(z) \prod_{l=1}^m w_l^{\beta_{lk}}(z), \quad k = \overline{1, n-m},$$

где показатели степеней $\beta_{lk} \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n-m}$.

Множества регулярных точек линейных систем (13) и (16) совпадают, а базисы автономных первых интегралов $F_k^{(13)}$ и $F_k^{(16)}$, $k = \overline{1, n-m}$, этих систем на их множестве V регулярных точек определяют слоения M^1 и M^2 соответственно.

Построим гомеоморфизм $\mathfrak{h}: V \rightarrow V$, устанавливающий топологическую эквивалентность слоений M^1 и M^2 , который ввиду принадлежности систем (13) и (16) классу H неособые слои слоения M^1 переводит в неособые слои слоения M^2 , а особые — в особые.

Будем без умаления общности считать, что при гомеоморфизме \mathfrak{h} многообразия

$$\{w_{m+k}(z) = 0\} \setminus \Pi, \quad k = \overline{1, n-m},$$

состоящие из особых слоёв, переходят сами в себя (этого всегда можно добиться перенумерованием зависимых переменных в системах (13) и (16)).

Удалением из слоений M^1 и M^2 многообразий

$$\{w_\zeta(z) = 0\} \setminus \Pi, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

состоящих из особых слоёв, получим слоения-сужения L^{13} и L^{14} , которые являются накрывающими на многообразии

$$\mathbb{C}^{n-m} \times \left(\mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\zeta=1}^m \{w_{\zeta}(z) = 0\} \right).$$

Накрываемость следует из равенств

$$F_k^{(13)} = C_k^{(13)} \quad \text{и} \quad F_k^{(16)} = C_k^{(16)}, \quad k = \overline{1, n-m},$$

если их разрешить относительно w_{m+k} , $k = \overline{1, n-m}$.

На комплексном многообразии

$$B = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\zeta=1}^m \{w_{\zeta}(z) = 0\}$$

группа изоморфизмов $I(H_1(B), H_1(B))$ порождена перестановками отрицательно ориентированных на комплексной прямой $w_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq \zeta$, пространства \mathbb{C}^n образующих $[g_{\zeta}]$ одномерной группы гомологий $H_1(B)$ и автоморфизмом

$$\text{Aut}_{\zeta} H_1(B): [g_{\zeta}] \rightarrow [g_{\zeta}]^{-1}, \quad \zeta = \overline{1, m}.$$

При этом на L^{13} действия

$$[g_{\zeta}]: w_{m+k} \rightarrow w_{m+k} \exp(2\pi i \alpha_{\zeta, m+k}), \quad k = \overline{1, n-m},$$

на L^{14} действия

$$[g_{\zeta}]: w_{m+k} \rightarrow w_{m+k} \exp(2\pi i \beta_{\zeta, m+k}), \quad k = \overline{1, n-m},$$

а значит, действия

$$\text{Aut}_{\zeta} H_1(B): w_{m+k} \rightarrow w_{m+k} \exp(-2\pi i \beta_{\zeta, m+k}), \quad k = \overline{1, n-m},$$

при $\zeta = \overline{1, m}$.

Отсюда, по лемме 1 и теореме 1, получаем критерий топологической эквивалентности слоений, определяемых системами (13) и (16) класса H .

Теорема 11. *Линейные системы (13) и (16) класса H топологически эквивалентны, если и только если существуют такие числа α_{m+k} с $\operatorname{Re} \alpha_{m+k} > -1$, $k = \overline{1, n-m}$, и перестановка $\chi: (1, \dots, m) \rightarrow (1, \dots, m)$, что при $k = \overline{1, n-m}$*

$$\delta_{\chi(\zeta), m+k}^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}} = \gamma_{\zeta, m+k} |\gamma_{\zeta, m+k}|^{\alpha_{m+k}}, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

и

$$\operatorname{Im} \alpha_{\zeta, m+k} \operatorname{Im} \beta_{\chi(\zeta), m+k} \varepsilon_{\chi(\zeta)} > 0, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

или

$$\bar{\delta}_{\chi(\zeta), m+k}^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}} = \gamma_{\zeta, m+k} |\gamma_{\zeta, m+k}|^{\alpha_{m+k}}, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

и

$$\operatorname{Im} \alpha_{\zeta, m+k} \operatorname{Im} \beta_{\chi(\zeta), m+k} \varepsilon_{\chi(\zeta)} < 0, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

где

$$\varepsilon_{\chi(\zeta)}^2 = 1, \quad \gamma_{\zeta, m+k} = \exp(2\pi i \alpha_{\zeta, m+k}),$$

$$\delta_{\zeta, m+k} = \exp(2\pi i \beta_{\zeta, m+k}), \quad \zeta = \overline{1, m}.$$

Отметим возможность приложения теоремы 11 в случае нелинейной вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{\zeta=1}^m (A_{\zeta} w + f_{\zeta}(w)) dz_{\zeta} \equiv F(w) dz, \quad (17)$$

где $f_{\zeta}(w) = \operatorname{colon}(f_{1\zeta}(w), \dots, f_{n\zeta}(w))$, $\zeta = \overline{1, m}$, а скалярные функции $f_{i\zeta}: w \rightarrow f_{i\zeta}(w)$, $i = \overline{1, n}$, $\zeta = \overline{1, m}$, голоморфны в окрестности U_0 точки $O(0, \dots, 0)$ из \mathbb{C}^n и представимы степенными рядами, у которых отсутствуют свободный и линейный члены, у матрицы F ранг $\operatorname{rank} F(w) = m$ почти везде в окрестности

U_0 , а матрицы A_ζ , $\zeta = \overline{1, m}$, таковы, что образованная на их основании система (13) принадлежит классу H .

Действительно, система (17) в случае общего положения для матриц A_ζ , $\zeta = \overline{1, m}$, невырожденным голоморфным преобразованием независимых переменных [83] приводится к линейной системе вида (13) класса H . А это, ввиду инвариантности топологической эквивалентности при голоморфизме, позволяет на основании теоремы 11 решить задачу топологической эквивалентности слоений, определяемых системой (17) в окрестности U_0 .

2.6. Слабо накрывающие слоения

Пусть C — линейно связное гладкое многообразие размерности $n + m$.

Определение 2. Гладкое слоение \mathfrak{L} размерности m на линейно связном гладком многообразии C с $\dim C = n + m$ назовём **слабо накрывающим** слоением, если на многообразии $A \times B$ тако, что замыкание $\overline{A \times B} = C$, гладкое слоение L , полученное из слоения \mathfrak{L} удалением разве лишь некоторого множества слоёв, является накрывающим слоением на многообразии $A \times B$.

Будем рассматривать линейно связные гладкие многообразия

$$C_j = \overline{A_j \times B_j}, \quad j = 1, j = 2,$$

где A_j и B_j — многообразия с ранее указанными свойствами.

Через \mathfrak{L}^j обозначим слабо накрывающее слоение на многообразии C_j , а через $\mathfrak{L}_{c_j}^j$ обозначим слой слоения \mathfrak{L}^j , содержащий точку c_j , $j = 1, j = 2$.

Два слабо накрывающих слоения \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 назовём *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\mathfrak{h}: C_1 \rightarrow C_2$ такой, что

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{L}_{c_1}^1) = \mathfrak{L}_{\mathfrak{h}(c_1)}^2, \quad \forall c_1 \in C_1.$$

Если сужением слабо накрывающего слоения \mathfrak{L}^j на множество $A_j \times B_j$ является накрывающее слоение L^j , $j = 1, j = 2$, а слоения-сужения L^1 и L^2 топологически эквивалентны, то слабо

накрывающие слоения \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 назовём *слабо топологически эквивалентными*.

Для гомеоморфизма

$$\mathfrak{h}: \overline{A_1 \times B_1} \rightarrow \overline{A_2 \times B_2},$$

устанавливающего топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 , сужение

$$h: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$$

на многообразии $A_1 \times B_1$ является гомеоморфизмом, устанавливающим топологическую эквивалентность накрывающих слоений-сужений L^1 и L^2 .

Поэтому топологически эквивалентные слабо накрывающие слоения являются слабо топологически эквивалентными.

При этом теорему 1 можно считать критерием слабой топологической эквивалентности слабо накрывающих слоений.

Это обосновано тем, что топологическая эквивалентность слоений-сужений L^1 и L^2 слабо накрывающих слоений \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 устанавливает слабую топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 .

Пусть гомеоморфизм $h: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$ определяет слабую топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 .

Построим продолжение \bar{h} гомеоморфизма h на замыкание $\overline{A_1 \times B_1} = C_1$ в виде гомеоморфизма

$$\bar{h}: C_1 \rightarrow C_2^*, \quad C_2^* \supset A_2 \times B_2.$$

Возможность всякий раз на основании гомеоморфизма h построить гомеоморфизм \bar{h} позволяет установить критерий топологической эквивалентности слабо накрывающих слоений.

Теорема 12. *Для того чтобы слабо накрывающие слоения \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовал гомеоморфизм $h: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$, определяющий слабую топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений \mathfrak{L}^1 и \mathfrak{L}^2 , та-*

кой, что его продолжение \bar{h} на замыкание $\overline{A_1 \times B_1} = C_1$ было гомеоморфизмом $\mathfrak{h}: C_1 \rightarrow C_2$, $C_2 = \overline{A_2 \times B_2}$, т.е. $\bar{h} = \mathfrak{h}$.

Слоения M^1 и M^2 из подпункта 2.5 являются слабо накрывающими слоениями.

Линейные системы (13) и (16) класса H будем называть *слабо топологически эквивалентными*, если слабо топологически эквивалентны слоения M^1 и M^2 .

Аналогично доказательству теоремы 11 доказывается

Теорема 13. *Для того чтобы линейные системы (13) и (16) класса H были слабо топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа α_{m+k} с $\operatorname{Re} \alpha_{m+k} > -1$, $k = \overline{1, n-m}$, и перестановка $\chi: (1, \dots, m) \rightarrow (1, \dots, m)$, что при $k = \overline{1, n-m}$*

$$\delta_{\chi(\zeta), m+k}^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}} = \gamma_{\zeta, m+k} |\gamma_{\zeta, m+k}|^{\alpha_{m+k}}, \quad \zeta = \overline{1, m},$$

или

$$\bar{\delta}_{\chi(\zeta), m+k}^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}} = \gamma_{\zeta, m+k} |\gamma_{\zeta, m+k}|^{\alpha_{m+k}}, \quad \zeta = \overline{1, m}.$$

2.7. Вещественные обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати

Рассмотрим уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t) \quad (18)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = b_2(t)x^2 + b_1(t)x + b_0(t), \quad (19)$$

где коэффициенты a_i и b_i , $i = \overline{0, 2}$, являются 1-периодическими голоморфными на \mathbb{R} функциями.

Эти уравнения назовём вещественными 1-периодическими уравнениями Риккати.

Пусть вещественное 1-периодическое уравнение (18) определяет накрывающее слоение L^{13} на многообразии $\overline{\mathbb{R}} \times S^1$, где \mathbb{R} есть вещественная прямая, дополненная бесконечно удалённой точкой ∞ , S^1 — окружность; а вещественное 1-периодическое уравнение (19) — накрывающее слоение L^{14} на том же многообразии.

Будем говорить, что вещественные 1-периодические уравнения Риккати (18) и (19) *топологически эквивалентны*, если накрывающие слоения L^{13} и L^{14} топологически эквивалентны.

Как и в подпункте 1.2, получаем, что преобразование голономии вещественного 1-периодического уравнения (18), соответствующее образующей группы $H_1(S^1)$, имеет вид

$$P(x) = \frac{p_{11}x + p_{12}}{p_{21}x + p_{22}},$$

а преобразование голономии вещественного 1-периодического уравнения (19), соответствующее той же образующей, — вид

$$Q(x) = \frac{q_{11}x + q_{12}}{q_{21}x + q_{22}}.$$

Дробно-линейному отображению $P: x \rightarrow P(x)$ поставим в соответствие матрицу

$$P = \|p_{ij}\| \in GL(2, \mathbb{R}),$$

а дробно-линейному отображению $Q: x \rightarrow Q(x)$ — матрицу

$$Q = \|q_{ij}\| \in GL(2, \mathbb{R}).$$

Матрицу P назовём *матрицей голономии* уравнения Риккати (18), а матрицу Q — *матрицей голономии* уравнения Риккати (19).

Лемма 3. Пусть p и q — ненулевые вещественные числа. Тогда равносильны следующие утверждения:

а) существует такой гомеоморфизм $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$H(pt) = qH(t); \tag{20}$$

б) существует такое вещественное число $\alpha > -1$, что

$$q = p|p|^\alpha. \quad (21)$$

Доказательство. Пусть имеет место тождество (20).

Поскольку при топологической сопряжённости (20) сохраняется ориентация, то $pq > 0$. Кроме того, из (20) следуют тождества

$$H(p^k t) = q^k H(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

из которых при $|p| \neq 1$ приходим к неравенству

$$\ln |p| \cdot \ln |q| > 0,$$

а при $|p| = 1$ приходим к равенству

$$q = p.$$

Объединяя оба случая, получаем равенство (21).

Импликация а) \implies б) доказана.

Докажем импликацию б) \implies а).

Пусть имеет место равенство (21). Тогда в качестве сопрягающего гомеоморфизма можно выбрать

$$H: t \rightarrow t|t|^\alpha. \blacksquare$$

Лемма 4. Пусть существует гомеоморфизм $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такой, что

$$f(P(x)) = Q(f(x)). \quad (22)$$

Тогда вещественные нормальные жордановы формы матриц P и Q имеют одинаковую структуру.

Доказательство проводится на основании того факта, что количество неподвижных точек нетождественного дробно-линейного отображения совпадает с числом собственных векторов соответствующей ему матрицы второго порядка. \blacksquare

Лемма 5. Для существования гомеоморфизма $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющего соотношению (22), необходимо и достаточно, чтобы:

1) в случае, когда матрицы P и Q имеют простую структуру и вещественные собственные числа p_1, p_2 и q_1, q_2 соответственно, существовало $\alpha > -1$ такое, что

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{p_1}{p_2} \right|^\alpha;$$

2) в случае, когда матрицы P и Q имеют комплексные собственные числа $\alpha + i\beta$ и $\gamma + i\delta$, $\beta\delta \neq 0$, соответственно, выполнялись условия

$$\psi = \pm \varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \psi = \arctg \frac{\delta}{\gamma};$$

3) в случае, когда матрицы P и Q имеют соответственно нормальные формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{cc} \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right\|,$$

причём $\mu_1\mu_2 \neq 0$, соотношение (22) всегда имеет место.

Доказательство первой части леммы осуществляется аналогично теореме 4.1 на основании леммы 3 и приведения матриц P и Q к нормальным жордановым формам (чему соответствует замена отображения f).

Во втором случае сначала приведём матрицы P и Q к вещественным нормальным жордановым формам (с соответствующей заменой гомеоморфизма f), а затем представим дробно-линейные отображения

$$\overline{P} = \frac{\alpha x + \beta}{-\beta x + \alpha} \quad \text{и} \quad \overline{Q} = \frac{\gamma x + \delta}{-\delta x + \gamma}$$

в виде

$$\overline{P} = \frac{x + \operatorname{tg} \varphi}{-x \operatorname{tg} \varphi + 1} \quad \text{и} \quad \overline{Q} = \frac{x + \operatorname{tg} \psi}{-x \operatorname{tg} \psi + 1}$$

соответственно.

Установим гомеоморфное соответствие между множествами $\overline{\mathbb{R}}$ и S^1 по формуле

$$p: x \rightarrow 2 \operatorname{arctg} x, \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \operatorname{arctg} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

Тогда непосредственными вычислениями получаем, что

$$p \circ P \circ p^{-1}: x \rightarrow x + 2\varphi, \quad p \circ Q \circ p^{-1}: x \rightarrow x + 2\psi.$$

Следовательно, условие (22) равносильно существованию гомеоморфизма $f: S^1 \rightarrow S^1$ такого, что

$$f(t + 2\varphi) = f(t) + 2\psi, \quad \forall t \in S^1.$$

Вращения окружности на углы 2φ и 2ψ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда

$$\psi = \pm \varphi.$$

При $\psi = \varphi$ сопряжённость осуществляется тождественным отображением, а при $\psi = -\varphi$ — отображением $f: t \rightarrow -t$.

В третьем случае аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что соотношение (22) равносильно существованию такого гомеоморфизма $g: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, что

$$g\left(x + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) = g(x) + \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

А в качестве сопрягающего гомеоморфизма можно взять

$$g: x \rightarrow \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1} x. \blacksquare$$

На основании теоремы 1 и лемм 3 – 5 получаем следующие закономерности.

Теорема 14. *Для топологической эквивалентности уравнений Риккати (18) и (19) необходимо, чтобы вещественные нормальные жордановы формы их матриц голономии P и Q имели одинаковую структуру.*

Теорема 15. Пусть P есть матрица голономии простой структуры с вещественными собственными числами p_1 и p_2 вещественного 1-периодического уравнения Риккати (18), Q — матрица голономии простой структуры с вещественными собственными числами q_1 и q_2 вещественного 1-периодического уравнения Риккати (19). Тогда для топологической эквивалентности уравнений Риккати (18) и (19) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое вещественное число $\alpha \neq -1$, что

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{p_1}{p_2} \right|^\alpha.$$

Теорема 16. Пусть P есть матрица голономии с комплексными собственными числами $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, вещественного 1-периодического уравнения Риккати (18), Q — матрица голономии с комплексными собственными числами $\gamma \pm i\delta$, $\delta \neq 0$, вещественного 1-периодического уравнения Риккати (19). Тогда для топологической эквивалентности уравнений (18) и (19) необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi = \pm \varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \psi = \arctg \frac{\delta}{\gamma}.$$

Теорема 17. Пусть нормальные жордановы формы матриц голономии P и Q вещественных 1-периодических уравнений Риккати (18) и (19) состоят из одного блока Жордана. Тогда вещественные 1-периодические уравнения Риккати (18) и (19) топологически эквивалентны.

2.8. Вещественные вполне разрешимые уравнения Риккати в полных дифференциалах

Рассмотрим вполне разрешимые уравнения Риккати

$$dx = \sum_{j=1}^m (a_{2j}(t)x^2 + a_{1j}(t)x + a_{0j}(t)) dt_j, \quad (23)$$

$$dx = \sum_{j=1}^m (b_{2j}(t)x^2 + b_{1j}(t)x + b_{0j}(t)) dt_j, \quad (24)$$

где $t = (t_1, \dots, t_m)$, коэффициенты a_{ij} и b_{ij} являются 1-периодическими по каждому аргументу t_j и голоморфными на \mathbb{R}^m функциями, $i = \overline{0, 2}$, $j = \overline{1, m}$, $m > 1$.

Уравнения (23) и (24) соответственно определяют накрывающие слоения L^{15} и L^{16} на многообразии $\mathbb{R} \times T^m$, где T^m есть m -мерный тор.

Будем говорить, что уравнения Риккати (23) и (24) *топологически эквивалентны*, если топологически эквивалентны накрывающие слоения L^{15} и L^{16} .

Как и в подпункте 2.4, получаем:

преобразования голономии уравнения (23), соответствующие образующим $[\alpha_j] \in H_1(T^m)$, имеют вид

$$P_j(x) = \frac{p_{11j}x + p_{12j}}{p_{21j}x + p_{22j}}, \quad j = \overline{1, m}; \quad (25)$$

преобразования голономии уравнения Риккати (24), соответствующие $[\alpha_j] \in H_1(T^m)$, — вид

$$Q_j(x) = \frac{q_{11j}x + q_{12j}}{q_{21j}x + q_{22j}}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Дробно-линейным отображениям $P_j: w \rightarrow P_j(w)$ поставим в соответствие матрицы

$$P_j = \|p_{ikj}\| \in GL(2, \mathbb{R}), \quad j = \overline{1, m}, \quad (27)$$

а дробно-линейным отображениям $Q_j: w \rightarrow Q_j(w)$ — матрицы

$$Q_j = \|q_{ikj}\| \in GL(2, \mathbb{R}), \quad j = \overline{1, m}. \quad (28)$$

Не умаляя общности, будем считать, что

$$\det^2 P_j = 1, \quad \det^2 Q_j = 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

Преобразования (25), (26) и, следовательно, матрицы (27), (28) являются перестановочными, так как дробно-линейные преобразования голономии определяются гомоморфизмами абелевой группы $H_1(T^m)$ в группу дробно-линейных преобразований многообразия \mathbb{R} .

Матрицы P_j назовём *матрицами голономии* уравнения Риккати (23), а матрицы Q_j — *матрицами голономии* уравнения Риккати (24).

Лемма 6. Пусть P_j есть матрицы голономии уравнения Риккати (23), Q_j — матрицы голономии уравнения Риккати (24), $j = \overline{1, m}$. Тогда для топологической эквивалентности этих уравнений необходимо, чтобы вещественные нормальные жордановы формы всех неединичных матриц P_j и Q_j имели одинаковую структуру при $j = \overline{1, m}$.

Доказательство следует из леммы 4 и теоремы 1. ■

Лемма 7. Для существования гомеоморфизма $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такого, что

$$\xi(p_j x) = q_j \xi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p_j q_j \neq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (29)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$q_j = p_j |p_j|^\alpha, \quad \alpha > -1, \quad j = \overline{1, m}. \quad (30)$$

Доказательство. Необходимость. В силу леммы 5

$$q_j = p_j |p_j|^{\alpha_j}, \quad \alpha_j > -1, \quad j = \overline{1, m},$$

и при этом $|p_j| = 1$ тогда и только тогда, когда $|q_j|$, $j = \overline{1, m}$.

Через I_1 обозначим множество таких индексов j , что

$$|p_j| = |q_j|.$$

Рассмотрим три логические возможности, когда дополнение $C_{I_1} I_1$ множества I_1 до множества $I = \{1, \dots, m\}$:

- 1) является пустым множеством;
- 2) является одноэлементным множеством;
- 3) состоит более чем из одного элемента.

Если $C_I I_1 = \emptyset$, т.е. $I = I_1$, а значит,

$$|p_j| = |q_j|, \quad j = \overline{1, m},$$

то соотношения (30) имеют место при любом вещественном α .

Если $C_I I_1 = \{\alpha_j\}$, то в (30) можно положить $\alpha = \alpha_j$.

Пусть

$$|p_{j_1}| \neq 1, \quad |p_{j_2}| \neq 1, \quad j_1, j_2 \in C_I I_1, \quad j_1 \neq j_2.$$

Тогда из (29) следует, что

$$\xi(p_{j_1}^l p_{j_2}^n x) = q_{j_1}^l q_{j_2}^n \xi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall l, n \in \mathbb{Z}.$$

В силу того, что множество рациональных чисел всюду плотно в множестве вещественных чисел, заключаем: существуют такие последовательности $\{l_s\}$ и $\{n_s\}$ целых чисел, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} p_{j_1}^{2l_s} p_{j_2}^{2n_s} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} |l_s| = \lim_{s \rightarrow +\infty} |n_s| = +\infty.$$

Тогда

$$\xi(x) = \lim_{s \rightarrow +\infty} |p_{j_1}|^{2l_s(\alpha_{j_1} - \alpha_{j_2})} \xi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} = \alpha_* > -1.$$

Поэтому в (30) в качестве α можно выбрать число α_* .

Достаточность доказывается путём построения сопрягающего гомеоморфизма

$$\xi: x|x|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > -1. \blacksquare$$

Лемма 8. Пусть $\{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ — множества вещественных собственных чисел перестановочных матриц $P_j \in GL(2, \mathbb{R})$

простой структуры, $\{\mu_{1j}, \mu_{2j}\}$ есть множества вещественных собственных чисел перестановочных матриц $Q_j \in GL(2, \mathbb{R})$ простой структуры, $j = \overline{1, m}$. Тогда для существования гомеоморфизма $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такого, что

$$f \circ P_j(x) = Q_j \circ f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (31)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\alpha > -1$, что

$$\frac{\mu_{1j}}{\mu_{2j}} = \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{2j}} \left| \frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{2j}} \right|^\alpha, \quad j = \overline{1, m}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1. ■

Лемма 9. Пусть матрицы P_j имеют вещественные нормальные жордановы формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{array} \right\|, \quad \varphi_j \in (-\pi; \pi], \quad j = \overline{1, m},$$

матрицы Q_j имеют вещественные нормальные жордановы формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \cos \psi_j & -\sin \psi_j \\ \sin \psi_j & \cos \psi_j \end{array} \right\|, \quad \psi_j \in (-\pi; \pi], \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда для топологической сопряжённости (31) необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_j = \varphi_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \text{или} \quad \psi_j = -\varphi_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 8 на основании леммы 5 с учётом того, что при топологическом сопряжении сохраняется ориентация. ■

Лемма 10. Для существования гомеоморфизма $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такого, что

$$\xi(x + p_j) = \xi(x) + q_j, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p_j q_j \neq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (32)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{q_1}{p_1} = \frac{q_j}{p_j}, \quad j = \overline{2, m}. \quad (33)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $j = 2$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{l}{n} \in \mathbb{Q}, \quad l, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда в силу соотношений (32) при $j = 1$ получаем

$$\xi(x + lp_1) = \xi(x) + lq_1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

а при $j = 2$ имеем, что

$$\xi(x + lp_1) = \xi(x + np_2) = \xi(x) + nq_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Сравнивая правые части полученных выражений, получаем формулу (33) при $j = 2$.

Пусть теперь

$$\frac{p_2}{p_1} = r \notin \mathbb{Q}.$$

В силу плотности множества рациональных чисел во множестве вещественных чисел, заключаем: существуют такие последовательности $\{l_s\}$ и $\{n_s\}$ целых чисел, что

$$|l_s| \rightarrow +\infty, \quad |n_s| \rightarrow +\infty, \quad \frac{l_s}{n_s} \rightarrow r \quad \text{при} \quad s \rightarrow +\infty.$$

Из соотношений (32) при $j = 1$ получаем, что

$$\xi(x + l_s p_1) - \xi(x) = l_s q_1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

а при $j = 2$ имеем

$$\xi(x + n_s r p_1) - \xi(x) = n_s q_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда получаем следующую цепочку равенств

$$1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\xi(x + l_s p_1) - \xi(x)}{\xi(x + n_s r p_1) - \xi(x)} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{l_s q_1}{n_s q_2} = r \frac{q_1}{q_2}.$$

Отсюда следует справедливость формулы (33) при $j = 2$.

Аналогичным образом доказывается, что формула (33) имеет место при $j = \overline{3, m}$.

Достаточность устанавливается гомеоморфизмом

$$\zeta: x \rightarrow \frac{q_1}{p_1} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Аналогично лемме 8 на основании леммы 10 доказываем следующее утверждение.

Лемма 11. Пусть матрицы $P_j \in GL(2, \mathbb{R})$ имеют вещественные нормальные формы

$$\left\| \begin{pmatrix} \lambda_j & p_j \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \right\|, \quad j = \overline{1, m},$$

матрицы $Q_j \in GL(2, \mathbb{R})$ имеют вещественные нормальные формы

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu_j & q_j \\ 0 & \mu_j \end{pmatrix} \right\|, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда для топологической сопряжённости (31) необходимо и достаточно, чтобы

$$q_j = \nu p_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

На основании теоремы 1 и лемм 6 – 11 заключаем, что имеет место

Теорема 18. Пусть P_j есть матрицы голономии уравнения Риккати (23), Q_j — матрицы голономии уравнения Риккати (24), $j = \overline{1, m}$. Тогда для топологической эквивалентности уравнений Риккати (23) и (24) необходимо и

достаточно, чтобы существовала такая унимодулярная матрица $\|a_{ij}\|$ размера m , что:

1) в случае, когда матрицы P_j и Q_j имеют соответственно вещественные нормальные жордановы формы

$$\text{diag} \{ \lambda_{1j}, \lambda_{2j} \} \quad \text{и} \quad \text{diag} \{ \mu_{1j}, \mu_{2j} \}, \quad j = \overline{1, m},$$

существовало такое вещественное число $\alpha \neq -1$, что

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{\mu_{1j}}{\mu_{2j}} \right)^{a_{ij}} = \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \left| \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \right|^\alpha, \quad i = \overline{1, m};$$

2) в случае, когда матрицы P_j и Q_j имеют соответственно вещественные нормальные жордановы формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{cc} \cos \psi_j & -\sin \psi_j \\ \sin \psi_j & \cos \psi_j \end{array} \right\|,$$

где $\varphi_j, \psi_j \in (-\pi; \pi]$, $j = \overline{1, m}$, выполняются равенства

$$\psi_j = \sum_{j=1}^m a_{ij} \varphi_j, \quad j = \overline{1, m};$$

3) в случае, когда матрицы P_j и Q_j имеют соответственно вещественные нормальные формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda_j & p_j \\ 0 & \lambda_j \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{cc} \mu_j & q_j \\ 0 & \mu_j \end{array} \right\|, \quad j = \overline{1, m},$$

выполняются равенства

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} q_j = \nu p_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим вполне разрешимые уравнения Риккати (23) и (24) в случае, когда коэффициенты a_{ij} и b_{ij} будут соответственно голоморфными на многообразиях Γ_1^n (пространство \mathbb{R}^m с n выколотыми точками t_{11}, \dots, t_{n1}) и Γ_2^n (пространство \mathbb{R}^m с n выколотыми точками t_{12}, \dots, t_{n2}).

Эти уравнения будем называть соответственно уравнениями Риккати (23п) и (24п).

Уравнения (23п) и (24п) соответственно определяют накрывающие слоения L^{17} и L^{18} на многообразиях $\overline{\mathbb{R}} \times \Gamma_1^n$ и $\overline{\mathbb{R}} \times \Gamma_2^n$.

Будем говорить, что уравнения Риккати (23п) и (24п) *топологически эквивалентны*, если топологически эквивалентны накрывающие слоения L^{17} и L^{18} .

Как и для уравнений (23) и (24), для уравнения Риккати (23п) получаем преобразования голономии (25) и матрицы голономии (27) для образующих $[\alpha_j] \in H_1(\overline{\mathbb{R}} \times \Gamma_1^n)$, а для уравнения Риккати (24п) — преобразования голономии (26) и матрицы голономии (28) для образующих $[\beta_j] \in H_1(\overline{\mathbb{R}} \times \Gamma_2^n)$.

Аналогично теореме 18 на основании теоремы 1 и лемм 6 — 11 получаем

Теорема 19. Пусть матрицы голономии P_j (матрицы голономии Q_j) уравнения Риккати (23п) (уравнения Риккати (24п)) перестановочны, $j = \overline{1, n}$. Тогда для топологической эквивалентности уравнений Риккати (23) и (24) необходимо и достаточно, чтобы существовала перестановка $\rho: (1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$ такая, что:

1) в случае, когда матрицы P_j и Q_j имеют соответственно вещественные нормальные жордановы формы

$$\text{diag} \{ \lambda_{1j}, \lambda_{2j} \} \text{ и } \text{diag} \{ \mu_{1j}, \mu_{2j} \}, j = \overline{1, n},$$

существовало такое вещественное число $\alpha \neq -1$, что

$$\frac{\mu_{1\rho(j)}}{\mu_{2\rho(j)}} = \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \left| \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \right|^\alpha, \quad i = \overline{1, n};$$

2) в случае, когда матрицы P_j и Q_j имеют соответственно вещественные нормальные жордановы формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{cc} \cos \psi_j & -\sin \psi_j \\ \sin \psi_j & \cos \psi_j \end{array} \right\|,$$

где $\varphi_j, \psi_j \in (-\pi; \pi]$, $j = \overline{1, m}$, выполняются равенства

$$\psi_{\rho(j)} = \varphi_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{или} \quad \psi_{\rho(j)} = -\varphi_j, \quad j = \overline{1, n};$$

3) в случае, когда матрицы P_j и Q_j имеют соответственно вещественные нормальные формы

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda_j & p_j \\ 0 & \lambda_j \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{cc} \mu_j & q_j \\ 0 & \mu_j \end{array} \right\|, \quad j = \overline{1, n},$$

выполняются равенства

$$q_{\rho(j)} = \nu p_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

3. Накрытие

3.1. Накрывающие слоения

Определение 1. Накрывающее слоение L^1 **накрывает** накрываемое слоение L^2 , если существует накрытие

$$h: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$$

такое, что

$$q_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2$$

и

$$h(L_{c_1}^1) = L_{h(c_1)}^2, \quad \forall c_1 \in A_1 \times B_1.$$

Пусть ν — мономорфизмы одномерных групп гомологий $H_1(B_1)$ и $H_1(B_2)$, индуцированные накрытиями $g_\nu: B_1 \rightarrow B_2$.

Группу мономорфизмов ν обозначим $\text{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2))$.

Теорема 1. *Для того чтобы накрывающее слоение L^1 накрывало накрывающее слоение L^2 , необходимо и достаточно, чтобы существовали мономорфизм ν , принадлежащий $\text{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2))$, и гомеоморфизм $f: A_1 \rightarrow A_2$ такие, что выполняются соотношения (1.1).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1 с учётом того, что отображение h является накрытием, а не вложением. ■

В частности, из теоремы 1 следует критерий накрытия накрывающего слоения L^2 накрывающим слоением L^1 на основании фундаментальных групп $\pi_1(B_1)$ и $\pi_1(B_2)$.

При этом порождённое слоением L^j преобразование голономии определяем как действие

$$\varphi^j: A_j \times \pi_1(B_j) \rightarrow A_j$$

группы $\pi_1(B_j)$ на многообразие A_j по формуле

$$\varphi_j^{\beta_j}(a_j) = (q_j \circ r_j \circ s_j(1))(a_j), \quad \forall a_j \in A_j, \quad \forall b_j \in \pi_1(B_j),$$

где r_j есть поднятие одного из путей

$$s_j(\tau) \subset B_j, \quad \forall \tau \in [0; 1],$$

которые соответствуют элементу β_j фундаментальной группы $\pi_1(B_j)$ на слой $L_{(a_j, s_j(0))}^j$ накрывающего слоения L^j в точку $(a_j, s_j(0))$, $j = 1, j = 2$.

Следствие 1. *Если многообразие B_1 является односвязным, то накрывающее слоение L^1 накрывает накрывающее слоение L^2 тогда и только тогда, когда многообразие B_1 накрывает многообразие B_2 .*

Например, накрывающее слоение на многообразии $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, определяемое линейной обыкновенной дифференциальной системой с постоянными коэффициентами, накрывает накрывающее слоение L^7 [49].

Аналогично теоремам 2.1 и 3.1 доказываются

Теорема 2. *Действия (3.1) необходимо сопряжены при накрытии накрывающего слоения L^2 накрывающим слоением*

L^1 , то есть,

$$\lambda \circ \Phi_{1k*}^{[\alpha]} = \Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])} \circ \lambda, \quad \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где мономорфизм ν и изоморфизм λ такие, что

$$\nu \in \text{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2))$$

и

$$\lambda: \pi_k(A_1) \rightarrow \pi_k(A_2), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 3. Действия (4.1) необходимо сопряжены при накрытии накрывающего слоения L^2 накрывающим слоением L^1 , то есть,

$$\sigma \circ \Phi_{1k*}^{[\alpha]} = \Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])} \circ \sigma, \quad \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где мономорфизм ν и изоморфизм σ такие, что

$$\nu \in \text{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2))$$

и

$$\sigma: H_k(A_1) \rightarrow H_k(A_2), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати

Рассмотрим уравнения Риккати (5.1) и (6.1), где функции a_k и b_k являются 1-периодическими и голоморфными на \mathbb{C} .

Функции b_k таковы, что

$$b_k(t+i) = b_k(t), \quad \forall t \in [0; 1], \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = \overline{0, 2}.$$

На многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times Z$ 1-периодическое уравнение Риккати (5.1) определяет накрывающее слоение L^{15} , а 1-периодическое уравнение Риккати (6.1) — накрывающее слоение L^{16} на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times T^2$, где T^2 — тор, определяемый развёрткой

$$K = \{z = x + iy \in \mathbb{C}: x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}.$$

Будем говорить, что 1-периодическое уравнение Риккати (5.1) *накрывает* 1-периодическое уравнение Риккати (6.1), если накрывающее слоение L^{15} накрывает накрывающее слоение L^{16} .

Группа $H_1(Z)$ изоморфна \mathbb{Z} , а группа $H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$.

Обозначим через $[\alpha]$ образующую группы $H_1(Z)$, а через $[\beta_1]$ и $[\beta_2]$ — образующие группы $H_1(T^2)$.

Пусть отображение $P: w \rightarrow P(w)$ есть преобразование голономии 1-периодического уравнения Риккати (5.1), соответствующее образующей $[\alpha]$, а отображение $Q_j: w \rightarrow Q_j(w)$ — преобразование голономии 1-периодического уравнения Риккати (6.1), соответствующее образующей $[\beta_j]$, при $j = 1, j = 2$.

Поставим в соответствие дробно-линейным преобразованиям $P(w)$ и $Q_1(w), Q_2(w)$ квадратные матрицы P и Q_1, Q_2 соответственно по закону из подпункта 1.2.

Матрицы P и Q_1, Q_2 назовём *матрицами голономии* соответственно 1-периодических уравнений Риккати (5.1) и (6.1).

Пусть цилиндр Z накрывает тор T^2 таким образом, что полоса $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ накрывает квадрат K .

Тогда на основании теоремы 1 аналогично теореме 5.1 доказывается

Теорема 4. Пусть $\{p_1, p_2\}, \{q_{11}, q_{21}\}, \{q_{12}, q_{22}\}$ — соответственно множества собственных чисел матриц голономии P, Q_1, Q_2 простой структуры. Тогда 1-периодическое уравнение Риккати (5.1) накрывает 1-периодическое уравнение Риккати (6.1) тогда и только тогда, когда при $j = 1$ или $j = 2$ выполняется хотя бы одно из условий

$$\frac{q_{1j}}{q_{2j}} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{p_1}{p_2} \right|^{\alpha_j} \quad \text{или} \quad \overline{q_{1j}/q_{2j}} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{p_1}{p_2} \right|^{\alpha_j},$$

где $\operatorname{Re} \alpha_j \neq -1$.

Список использованной литературы

1. *Амелькин В.В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. — Минск: Университетское, 1985. — 142 с.
2. *Амелькин В.В., Малевич А.Э.* Предельные свойства орбит общих динамических систем. I; II // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. — 1999. — № 2. — С. 42 — 46; — 2000. — № 1. — С. 38 — 42.
3. *Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. I // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). — М.: ВИНТИ, 1985. — С. 7 — 149.
4. *Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н.* К вопросу об интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. Акад. наук БССР. — 1984. — Т. 28, № 7. — С. 581 — 584.
5. *Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н.* К вопросу о построении первого интеграла или последнего множителя нелинейной системы дифференциальных уравнений // Докл. Акад. наук БССР. — 1986. — Т. 30, № 9. — С. 791 — 792.
6. *Базылев В.Т.* Геометрия дифференцируемых многообразий. — М.: Высшая школа, 1989. — 221 с.
7. *Барбашин Е.А.* Метод сечений в теории динамических систем. — Минск: Наука и техника, 1979. — 120 с.
8. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
9. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
10. *Бибииков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991. — 303 с.
11. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 444 с.
12. *Буслюк Д.В., Горбузов В.Н.* Интегралы системы Якоби в частных производных // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2000. — №1(3). — С. 4 — 11.
13. *Буслюк Д.В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 3. — С. 418 — 419.

14. *Буслюк Д.В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Гроднен. гос. ун-т. — Гродно, 2000. — 95 с.
15. *Гайшун И.В.* Автономные вполне интегрируемые уравнения. — Минск: Ин-т мат. Акад. наук БССР, 1981. — 38 с.
16. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. — Минск: Наука и техника, 1983. — 272 с.
17. *Гайшун И.В.* Линейные уравнения в полных производных. — Мн.: Наука и техника, 1989. — 254 с.
18. *Гайшун И.В.* Условия выпрямляемости вполне интегрируемых уравнений // Докл. Акад. наук БССР. — 1981. — Т. 25, № 5. — С. 389 — 391.
19. *Галиуллин А.С.* Аналитическая динамика. — М.: Высшая школа, 1989. — 263 с.
20. *Галиуллин А.С.* Инвариантность действия и обратные задачи динамики // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 8. — С. 1318 — 1325.
21. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
22. *Гафаров Г.Г.* О симметриях и первых интегралах динамических систем // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 3. — С. 531 — 532.
23. *Горбузов В.Н.* Автономность интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 939 — 946.
24. *Горбузов В.Н.* Автономность системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 2. — С. 149 — 156.
25. *Горбузов В.Н.* Алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 9. — С. 1579 — 1580.
26. *Горбузов В.Н., Даранчук С.Н.* Базис автономных первых интегралов системы Якоби-Фурье // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. — 2005. — № 3. — С. 70 — 74.
27. *Горбузов В.Н.* Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах: монография. — Гродно: ГрГУ, 2005. — 273 с.

28. *Горбузов В.Н.* К вопросу выпрямляемости многомерных динамических систем // Докл. Акад. наук Беларуси. — 1997. — Т. 41, № 3. — С. 36 — 38.

29. *Горбузов В.Н.* К вопросу об интегрируемости в квадратурах // Докл. Акад. наук БССР. — 1981. — Т. 25, № 7. — С. 584 — 585.

30. *Горбузов В.Н.* К вопросу устойчивости компактных регулярных орбит // Докл. Акад. наук Беларуси. — 1997. — Т. 41, № 4. — С. 40 — 43.

31. *Горбузов В.Н.* Математический анализ: теория поля. — Гродно: ГрГУ, 2000. — 627 с.

32. *Горбузов В.Н.* Об одной дифференциальной системе второго порядка и её периодических решениях // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 9. — С. 1487 — 1497.

33. *Горбузов В.Н.* О некоторых классах автономных систем с частным интегралом // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 9. — С. 1685 — 1687.

34. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* К вопросу устойчивости состояния равновесия многомерного дифференциального уравнения // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. — 1997. — № 3. — С. 37 — 39.

35. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* О траекториях и построении функций Ляпунова алгебраически вложимых автономных дифференциальных систем // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Мех. — 1995. — № 1. — С. 38 — 42.

36. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б.* Решения, интегралы и предельные циклы системы Дарбу n -го порядка // Дифференц. уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru>). — 2002. — № 2. — С. 26 — 46.

37. *Горбузов В.Н.* Первые интегралы систем уравнений Пфаффа // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2005. — № 2. — С. 10 — 29 с.

38. *Горбузов В.Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 4. — С. 562 — 564.

39. *Горбузов В.Н.* Признаки ограниченности числа возможных компактных гиперповерхностей, определяемых дифференциальными системами // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 30 — 37.

40. *Горбузов В.Н.* Признаки ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 10. — С. 1325 — 1329.

41. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы \mathbb{R} -линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларуси. — 2004. — Т. 48, № 1. — С. 49 — 52.

42. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Построение интегралов линейной дифференциальной системы // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2003. — № 2(22). — С. 50 — 60.

43. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференц. уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru>). — 2001. — № 3. — С. 17 — 45.

44. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнение Дарбу и его аналоги. — Гродно: ГрГУ, 1985. — 94 с.

45. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнения Риккати и Абеля. — Гродно: ГрГУ, 1986. — 101 с.

46. *Горбузов В.Н.* Симметрии многомерных дифференциальных систем с неполной интегрируемостью // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 1999. — № 1. — С. 26 — 37.

47. *Горбузов В.Н.* Системы со специальными аналитическими и качественными свойствами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Бел. гос. ун-т. — Минск, 1981. — 154 с.

48. *Горбузов В.Н.* Теорема Пуанкаре об отсутствии компактных регулярных орбит и её приложение // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 11. — С. 1563 — 1565.

49. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Накрытие слоений, определяемых дифференциальными уравнениями // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2002. — № 1(9). — С. 14 — 19.

50. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сборник. — 1992. — Т. 183, № 3. — С. 76 — 94.

51. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 10. — С. 1819 — 1822.

52. *Горбузов В.Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления (<http://www.neva.ru>). — 2000. — № 2. — С. 1 — 36.

53. *Грудо Э.И.* Структура решений автономной системы Пфаффа в одном алгебраическом случае // Весці Акад. навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. — 1982. — № 2. — С. 11 — 15.

54. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. II. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 564 с.

55. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. — Л.; М.: ОНТИ, 1934. — 360 с.

56. *Даранчук С.Н.* Базис автономных первых интегралов системы Якоби-Фурье в комплексной плоскости // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2005. — № 1(31). — С. 27 — 32.

57. *Долов М.В., Алексеев А.А.* Об отсутствии предельных циклов динамических систем с интегрирующим множителем специального вида // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 947 — 954.

58. *Долов М.В.* Интеграл Дарбу в случае фокуса // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 7. — С. 1173 — 1178.

59. *Долов М.В.* Интегралы Дарбу и особые циклы // Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). — 1985. — С. 5 — 8.

60. *Долов М.В.* Канонические интегралы и предельные циклы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Горький, 1983.

61. *Долов М.В.* Канонический интеграл в окрестности фокуса // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 11. — С. 1946 — 1953.

62. *Долов М.В., Косарев В.В.* Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 4. — С. 697 — 700.

63. *Долов М.В.* О дифференциальных уравнениях, имеющих интегралы Дарбу // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 10. — С. 1765 — 1779.

64. Долов М.В. О дифференциальных уравнениях, порождённых интегралом типа Дарбу // Дифференц. и интегр. уравнения (Нижегород). — 1990. — С. 31 — 37.

65. Долов М.В. Особые циклы и обобщённые алгебраические первые интегралы // Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). — 1987. — С. 29 — 31.

66. Долов М.В., Павлюк Ю.В. О предельных циклах эллиптического типа двумерных автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, №10. — С. 1303 — 1309.

67. Долов М.В., Чистякова С.А. О структуре общего решения и интегрирующего множителя в окрестности простой особой точки // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 5. — С. 710 — 713.

68. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979. — 744 с.

69. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. — 1952. — Т. 16, вып. 6. — С. 659 — 670.

70. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с.

71. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. — 304 с.

72. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997. — 512 с.

73. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4(286). — С. 83 — 144.

74. Имшенецкий В.Г. Дополнение теории и одно приложение способа нахождения рациональных дробных решений линейных дифференциальных уравнений // Зап. Петерб. Акад. наук. Сер. 7. — 1888. — Т. 58. — С. 1 — 28.

75. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 260 с.

76. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971. — 392 с.
77. *Картан Э.* Избранные труды. — М.: МЦНМО, 1998. — 392 с.
78. *Картан Э.* Интегральные инварианты. — М.;Л.: ГИТТЛ, 1940. — 216 с.
79. *Качественная теория динамических систем второго порядка*/ Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. — М.: Наука, 1966. — 568 с.
80. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
81. *Коркин А.Н.* Изыскания о множителях дифференциальных уравнений первого порядка // Матем. сб. — 1903 — 1904. — Т. 24, № 2 — 3. — С. 194 — 416.
82. *Лагутинский М.* Частные алгебраические интегралы. — Харьков: А. Дарре, 1908. — 211 с.
83. *Ладис Н.Н.* Нормальные формы вполне интегрируемых систем // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 11. — С. 1994 — 1999.
84. *Ладис Н.Н.* Топологическая эквивалентность линейных действий \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^n // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 3. — С. 443 — 448.
85. *Ладис Н.Н.* Топологическая эквивалентность неавтономных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 5. — С. 951 — 953.
86. *Ладис Н.Н.* Топологические инварианты комплексных линейных потоков // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 12. — С. 2159 — 2169.
87. *Летников А.В.* Об условиях интегрируемости некоторых дифференциальных уравнений // Мат. сб. — 1866. — Т. 1. — С. 143 — 194.
88. *Малевич А.Э.* Свойства орбит автономных вполне интегрируемых уравнений первого порядка в полных производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Бел. гос. ун-т. — Минск, 1997. — 105 с.
89. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — СПб.: Изд-во «Лань», 2003. — 832 с.

90. *Математика* в СССР за сорок лет. 1917 – 1957. Т. 2. Библиография. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 820 с.

91. *Мироненко В.И.* Дифференциальные системы, эквивалентные по вложимости // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 7. – С. 1225 – 1231.

92. *Мироненко В.И.* Замечания о стационарных интегралах и о стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 864 – 868.

93. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

94. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений системы дифференциальных уравнений и системы с алгебраическими траекториями // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 2197 – 2204.

95. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

96. *Нелинейные* колебания в системах второго порядка/ Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 210 с.

97. *Немыцкий В.В.* Общие динамические системы // Докл. Акад. наук СССР. – 1946. – Т. 53, № 6. – С. 495 – 498.

98. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

99. *Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ дифференциальных уравнений механики // Итоги науки и техники: Общая механика. Т. 2. – М.: ВИНТИ, 1975. – С. 5 – 72.

100. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

101. *Павлючик П.Б.* Алгебраически вложимые системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1130 – 1131.

102. *Перов А.И.* Изучение окрестности особой точки многомерного дифференциального уравнения в аналитическом случае // Докл. Акад. наук СССР. – 1966. – Т. 166, № 3. – С. 544 – 547.

103. *Перов А.И.* К вопросу о структуре предельного множества // Докл. Акад. наук СССР. — 1967. — Т. 176, № 3. — С. 526 — 529.

104. *Перов А.И.* Многомерные дифференциальные уравнения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. — Воронеж, 1966. — 300 с.

105. *Перов А.И.* О топологических характеристиках решений многомерных дифференциальных уравнений // Докл. Акад. наук СССР. — 1964. — Т. 157, № 4. — С. 791 — 794.

106. *Перов А.И., Эгле И.Ю.* К теории Пуанкаре-Донжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 801 — 810.

107. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 516 с.

108. *Построение систем программного движения* / Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. — М.: Наука, 1971. — 352 с.

109. *Проневич А.Ф.* Базис автономных первых интегралов линейной системы третьего порядка в комплексной области // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2002. — № 2(11). — С. 23 — 29.

110. *Проневич А.Ф.* Интегралы линейной многомерной системы простой матричной структуры // Mathematical research (Saint-Petersburg). — 2003. — Vol. 10. — P. 143 — 152.

111. *Проневич А.Ф.* Интегралы якобиевой системы в комплексной области // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. — 2002. — № 1(9). — С. 19 — 25.

112. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. — 392 с.

113. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. — 355 с.

114. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

115. *Ткачѳв В.Ф.* Обобщение одной теоремы А. Пуанкаре об отсутствии предельных циклов и некоторые другие результаты // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. XVI, вып. 5(101). — С. 205 — 207.

116. *Тыщенко В.Ю.* О классификации вполне разрешимых уравнений Риккати // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. — 2005. — № 3. — С. 74 — 79.

117. *Тыщенко В.Ю.* Системы обыкновенных дифференциальных уравнений со специальными интегралами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 / Гроднен. гос. ун-т. — Гродно, 1993. — 85 с.

118. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.

119. *Чеботарёв Н.Г.* Теория групп Ли. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1940. — 360 с.

120. *Черкас Л.А.* Методы оценки числа предельных циклов автономных систем // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 5. — С. 779 — 802.

121. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947. — 360 с.

122. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986. — 243 с.

123. *Gauss C.F.* Bericht über die Abhandlung von Pfaff // Götting. gelehrte Anzeigen. — 1815. — Vol. 1. — S. 1025 — 1038.

124. *Darboux M.G.* Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré // Bull. des sci. — 1878. — Vol. 2. — P. 60 — 96.

125. *Drach J.* Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes // Ann. sci. École norm. super. Sér. 3. — 1898. — Vol. 15. — P. 243 — 384.

126. *Frobenius G.* Ueber das Pfaff'sche Problem // J. für die reine und angew. Math. — 1877. — Bd. 82, H. 3 — 4. — S. 230 — 315.

127. *Hopf E.* Statistical hydromechanics and functional calculus // J. Rat. Mech. Anal. — 1952. — Vol. 87, No. 1. — P. 19 — 43.

128. *Jacobi C.G.J.* De integratione aequationis differentialis $(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0$. // J. für reine und angew. Math. — 1842. — Bd. 24. — S. 1 — 4.

129. *Jacobi C.G.J.* Theoria nova multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi // J. für reine und angew. Math. — 1844. — Vol. 27. — S. 199 — 268; 1845. — Vol. 29. — S. 213 — 279, 333 — 376.

130. *Jacobi C.G.J.* Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren // J. für reine und angew. Math. — 1827. — Bd. 2, H. 2. — S. 347 — 357.

131. *Minding F.* Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung // Mem. de l'Acad. des Sci. de St.-Petersbourg VII-me série. — 1862. — Vol. 5, No. 1. — P. 1 — 95.

132. *Lie S.* Theorie des Pfaff'schen Problems // Ark. math. og naturvidenskab. — 1877. — Bd. 2. — S. 338 — 379.

133. *Lie S.* Über gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestattet // Ark. math. og naturvidenskab. — 1882. — Bd. 7, H. 4. — S. 443 — 444.

134. *Lie S.* Über Gruppen von Transformationen // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. — 1874. — Bd. 9. — S. 529 — 542.

135. *Lie S.* Verallgemeinerung und neue Verwertung der Jacobischen Multiplicator-Theorie // Förhandl. vid.-selsk. Christiania. — 1874 — 1875. — Bd. 8. — S. 255 — 274.

136. *Lie S.* Zur Theorie des Integrabilitätsfactors // Förhandl. vid.-selsk. Christiania. — 1874 — 1875. — Bd. 8. — S. 242 — 254.

137. *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites // J. math. pures et appl. — 1839. — Vol. 4. — P. 423 — 456.

138. *Liouville J.* Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. math. pures et appl. — 1841. — Vol. 6. — P. 1 — 13, 36.

139. *Pfaff J.F.* Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nee non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotanque variables, complete integrandi // Abhandl. Kgl. Akad. Wiss. Berlin. — 1814 — 1815. — S. 76 — 135.

140. *Vessiot E.* Sur l'intégration des équations différentielles linéaires // Ann. sci. École norm. super. Sér. 3. — 1892. — Vol. 9. — P. 197 — 280.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Список условных обозначений	7
Введение	9
1. Линейные дифференциальных операторы первого порядка	9
2. Дифференциальные формы	12
Глава 1. Первые интегралы и последние множители	15
§ 1. Полная разрешимость системы уравнений в полных дифференциалах	15
1. Задача Коши	15
2. Условия Фробениуса	17
2.1. Разрешимость задачи Коши	17
2.2. Необходимые условия полной разрешимости	19
2.3. Интегральная система задачи Коши	20
2.4. Теорема Фробениуса	22
§ 2. Базис первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах	26
1. Первый интеграл	26
2. Базис первых интегралов	28
3. Размерность базиса первых интегралов вполне разрешимой системы	29
§ 3. Первые интегралы линейной однородной системы уравнений в частных производных	35
1. Базис первых интегралов	35
2. Основные классы систем	38
3. Неполная система	40
4. Полная система	43
5. Размерность базиса первых интегралов	49
§ 4. Размерность базиса первых интегралов не вполне разре- шимой системы уравнений в полных дифференциалах	53
§ 5. Метод Якоби построения базиса первых интегралов	60
1. Интегрирование якобиевой линейной однородной системы уравнений в частных производных	60

2. Интегрирование полной линейной однородной системы уравнений в частных производных	70
3. Построение базиса первых интегралов вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах ..	72
§ 6. Первые интегралы системы уравнений Пфаффа	77
1. Интегрально равносильные системы Пфаффа	77
2. Интегральный базис	79
3. Критерий существования первого интеграла	83
4. Интегральная равносильность с линейной однородной системой в частных производных	85
5. Преобразование системы уравнений Пфаффа по известным первым интегралам	88
6. Замкнутые системы	90
7. Интерпретация замкнутости в терминах дифференциальных форм	92
8. Незамкнутые системы	100
9. Интегральная равносильность с системой уравнений в полных дифференциалах	102
§ 7. Цилиндричность и автономность первых интегралов	106
1. Цилиндричность первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных ...	106
2. Первые интегралы s -неавтономных вполне разрешимых систем уравнений в полных дифференциалах	111
3. s -неавтономные и $(n - k)$ -цилиндричные первые интегралы систем уравнений в полных дифференциалах..	115
§ 8. Последние множители	121
1. Последний множитель линейной однородной системы уравнений в частных производных	121
2. $(n - k)$ -цилиндричные последние множители линейной однородной системы в частных производных	124
3. Последний множитель системы уравнений в полных дифференциалах	129
4. s -неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные последние множители системы в полных дифференциалах	132
§ 9. Первые интегралы и последние множители систем с симметриями	137
1. Построение первых интегралов и последнего множителя системы (∂) по допускаемым операторам ..	137

2. Построение первых интегралов и последнего множи-	
теля системы (ICD) по допускаемым операторам	142
3. Обратная задача группового анализа	152
Глава 2. Частные интегралы	161
§ 1. Интегральные многообразия	161
1. Интегральные гиперповерхности	161
2. s -неавтономные $(n - k)$ -цилиндричные	
интегральные гиперповерхности	164
§ 2. Интегралы неавтономной полиномиальной системы	
уравнений в полных дифференциалах	168
1. Неавтономная полиномиальная система уравнений	
в полных дифференциалах	168
2. Полиномиальные частные интегралы	169
3. Кратные полиномиальные частные интегралы	173
4. Условные частные интегралы	176
5. Первые интегралы типа Дарбу	178
6. Последние множители типа Дарбу	184
§ 3. Частные интегралы автономных полиномиальных	
систем уравнений в полных дифференциалах	187
1. Частные интегралы	187
2. Автономные системы типа Дарбу	200
3. Построение первых интегралов и последних	
множителей	206
3.1. Системы (APCD) класса \mathfrak{A}	206
3.2. Системы (IAPCD) класса \mathfrak{A}	208
3.3. Специальные случаи	212
4. Интегральные точки	227
4.1. Системы (APCD) класса \mathfrak{B}	227
4.2. Интегралы систем (APCD \mathfrak{B})	228
4.3. Интегралы систем (IAPCD \mathfrak{B})	233
§ 4. Интегралы линейной автономной системы уравнений	
в полных дифференциалах	239
1. Линейный частный интеграл	239
2. Автономный базис первых интегралов	241
2.1. Случай вещественных интегральных характеристических	
корней	241
2.2. Случай комплексных интегральных характеристических	
корней	244
2.3. Случай кратных интегральных характеристических корней . .	252
	445

3. Неавтономные первые интегралы	267
§ 5. Интегралы автономной системы Якоби	
в полных дифференциалах	273
1. Линейный частный интеграл	273
2. Автономный базис первых интегралов	276
2.1. Случай вещественных интегральных характеристических корней	276
2.2. Случай комплексных интегральных характеристических корней	280
2.3. Случай кратных интегральных характеристических корней ..	288
3. Неавтономные первые интегралы	305
Глава 3. Интегральные многообразия	
дифференциальных систем	312
§ 1. Ограниченность числа компактных регулярных	
интегральных многообразий	313
1. Автономная обыкновенная дифференциальная система	313
2. Автономная система уравнений в полных дифференциалах	324
2.1. Ограниченность числа компактных интегральных многообразий	324
2.2. Признаки отсутствия компактных регулярных орбит	326
§ 2. Ограниченность числа компактных интегральных	
гиперповерхностей	330
1. Система внешних дифференциальных уравнений	331
2. Система уравнений Пфаффа	337
3. Автономная обыкновенная дифференциальная система	343
4. Автономная система в полных дифференциалах	350
5. Линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных	354
§ 3. Алгебраически вложимые системы уравнений в полных	
дифференциалах	358
1. Алгебраическая вложимость	358
2. Компактные регулярные орбиты алгебраически вложимых систем	365
3. Выпрямляемость алгебраически вложимых систем ...	368
4. Интегралы алгебраически вложимых систем	370
5. Об одном преобразовании	372

§ 4. Компактные регулярные слоения коразмерности один автономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах	374
1. Изолированные компактные регулярные орбиты	374
2. Регулярные центры	377
§ 5. Классификация слоений дифференциальных уравнений .	383
1. Вложимость	383
1.1. Накрывающие слоения	383
1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати	387
2. Эквивалентность	395
2.1. Накрывающие слоения	395
2.2. Обыкновенные линейные дифференциальные системы	396
2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати	401
2.4. Уравнения Риккати в полных дифференциалах	404
2.5. Автономные линейные системы уравнений в полных дифференциалах	407
2.6. Слабо накрывающие слоения	412
2.7. Вещественные обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати	414
2.8. Вещественные вполне разрешимые уравнения Риккати в полных дифференциалах	419
3. Накрытие	428
3.1. Накрывающие слоения	428
3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения Риккати	430
Список использованной литературы	432

Научное издание

Горбузов Виктор Николаевич

ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Монография

Редактор Н.Н. Красницкая
Компьютерная верстка: С.Н. Даранчук

Сдано в набор 12.01.2006. Подписано в печать 15.03.2006.

Формат 60х84/16. Бумага офсетная.

Печать RISO. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 25,98. Уч.-изд. л. 24,64. Тираж 100 экз. Заказ

Учреждение образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»

ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.

Отпечатано на технике издательского центра

Учреждения образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»

ЛП № 02330/0056882 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.